四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

御製數理精蘊下編卷十五 十六

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官檢討臣何思鈞

校對官教習臣倪廷梅

謄録監生臣文昌儒

繪圖監生臣周濬

御製數理精蘊下編卷十五

面部五

割圜 屢求勾股

割圜

周髀曰圓出於方方出於矩矩者所謂直角即勾股也葢因方易度而圓難測方有盡而圓無盡故古人用割圜之法内弦外切屢求勾股為無數多邊形以切近圜界使弧線直線漸合為一而圓周始得是則推圜者以方推方者以矩矣劉宋祖冲之以圜容六邊起算元趙友欽以圜容四邊起算自明末西法入中國又有割圜八線六宗三要等説而圜度内外諸線相求之法始備要之圜内六邊起算者圜徑折半

即圜内六邊之一乃用屢求勾股之法自六邊而十二邊自十二邊而二十四邊自二十四邊而四十八邊如是累至億萬邊設徑為一而周得三一四一五九二六五三有餘圜内四邊起算者則以圜徑為内容正方之斜弦自乘折半開方而得四邊之一亦用屢求勾股之法自四邊而八邊自八邊而十六邊自十六邊而三十二邊如是累至億萬邊設徑為一而周亦得三一四一五九二六五三有餘圜外四邊起算者圜徑即四邊之一圜徑自乘倍之開方即圜外

正方之斜弦減去圜徑即圜外兩角之餘又即圜外八邊之一以八邊之一折半為勾半徑為股求得弦與半徑相減即股弦較又即小同式形之勾乃以八邊之一折半之勾為一率半徑之股為二率小同式形之勾為三率推得四率為小同式形之股倍之即十六邊之一如是累至億萬邊設徑為一而周亦得三一四一五九二六五三有餘圜外六邊起算者圜徑為弦半徑為勾求得股倍之即圜外三邊之一取其三分之一即圜外六邊之一以六邊之一折半為

勾半徑為股求得弦與半徑相減即股弦較又即小同式形之勾乃以六邊之一折半之勾為一率半徑之股為二率小同式形之勾為三率推得四率為小同式形之股倍之即十二邊之一如是累至億萬邊設徑為一而周亦得三一四一五九二六五三有餘此兩法者或自圜內容形之邊為勾股法使無數勾股小弦逼近圜周將與圜周合而為一或自圜外切形之邊為勾股法使無數勾股小股逼近圜周亦將與圜周合而為一二法既立故凡圜周圜徑諸法皆

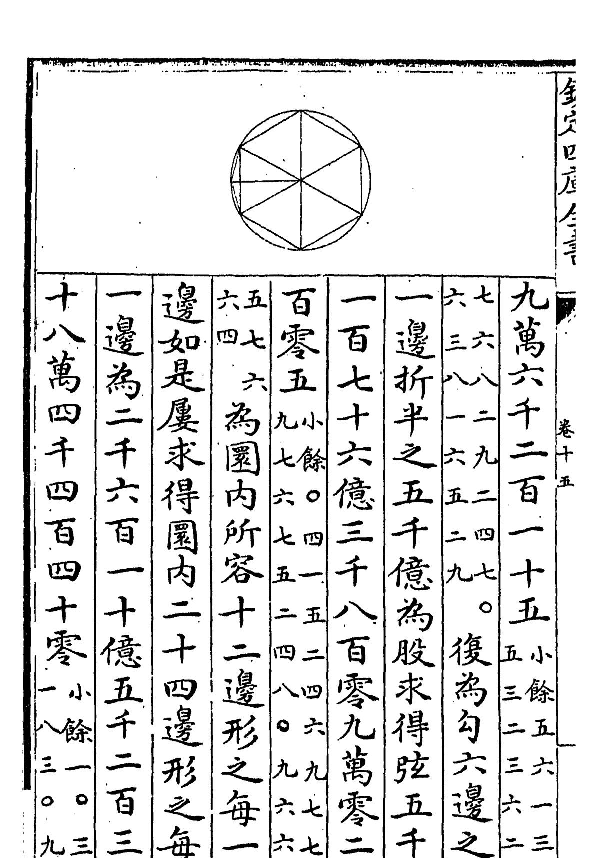
可以互相比例矣割圜八線則將圜周分為三百六十度先求弧度通弦折半為正弦既得正弦而圜内之正矢圜外之正切正割由之而生至於餘弦餘矢餘切餘割則又由正而得名三百六十度平分四象限每一象限九十度九十度之中得其正角為正餘角為餘是以正餘相對而割圜八線之表以立一象限中成勾股形者五千四百故凡勾股三角測量諸法皆可以互相比例矣自圜内容形屢求勾股而得無數多邊自圜外切形屢求勾股而得無數多邊内

外湊集則圜周漸變為直線而設圜界為度分者內而正弦外而切線至於無數則圜周亦漸變為直線二者互相叅考俱為相符可見理之至者先後一揆法之精者中外一理然則勾股即割圜之體而割圜即勾股之用二者交相成而兩相得乎

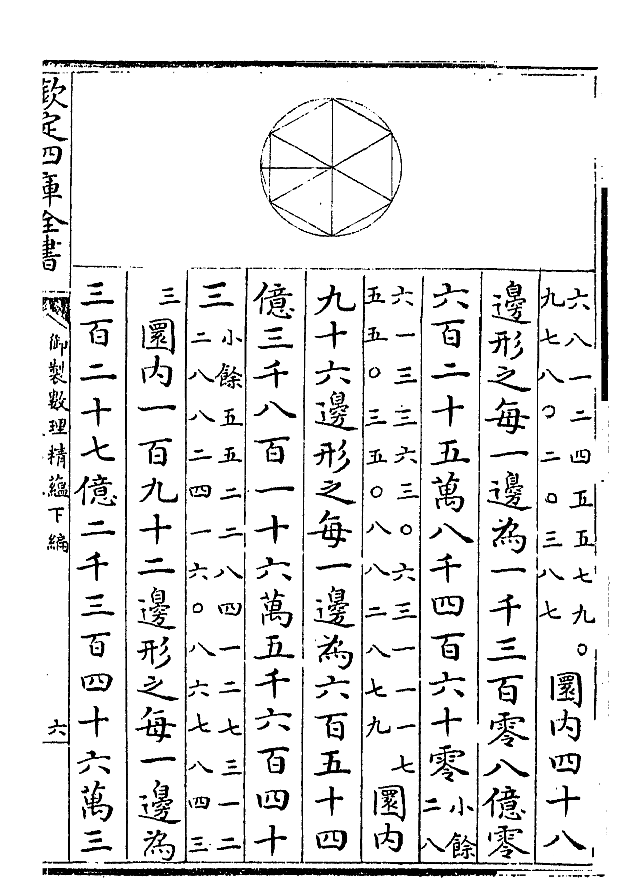
圜內容六邊起算

設如圜徑二兆用內容六邊起算問得圜周幾何

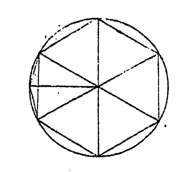
法以圜徑二兆折半得一兆為圜內所容六邊形之每一邊乃以半徑一兆為弦六邊之一邊一兆折半得五千億為勾求得股八千六百六十億二千五百四十萬三千七百八十四小餘四三八六四六七六三七二三一七〇七五二九三六一八三四七一與半徑相減餘一千三百三十九億七千四百五十



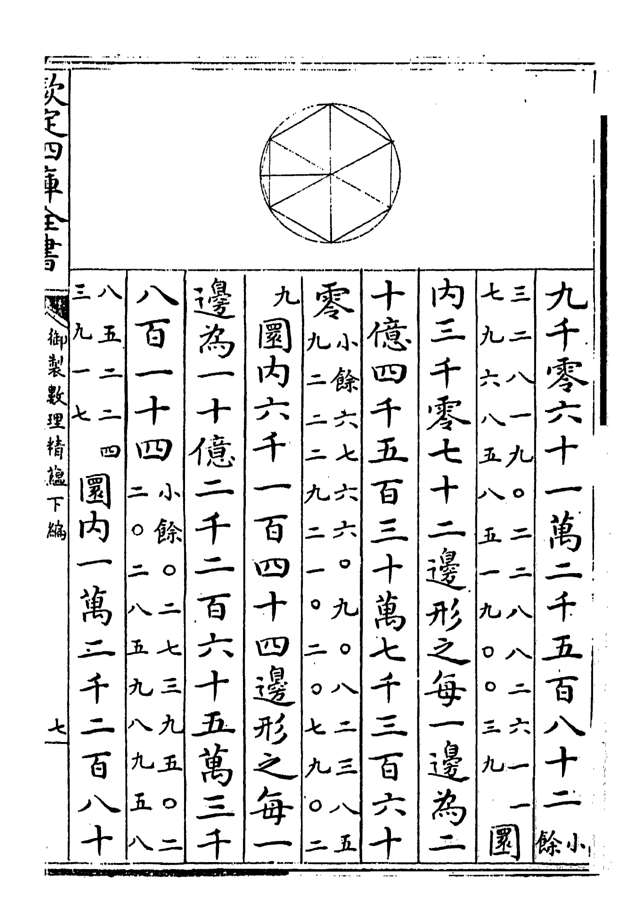
九萬六千二百一十五小餘五六一三五三二三六二七六八二九二四七〇六三八一六五二九復為勾六邊之一邊折半之五千億為股求得弦五千一百七十六億三千八百零九萬零二百零五小餘〇四一五二四六九七七九七六七五二四八〇九六六五七六六四為圜内所容十二邊形之每一邊如是屢求得圜内二十四邊形之每一邊為二千六百一十億五千二百三十八萬四千四百四十零小餘一〇三一八三〇九



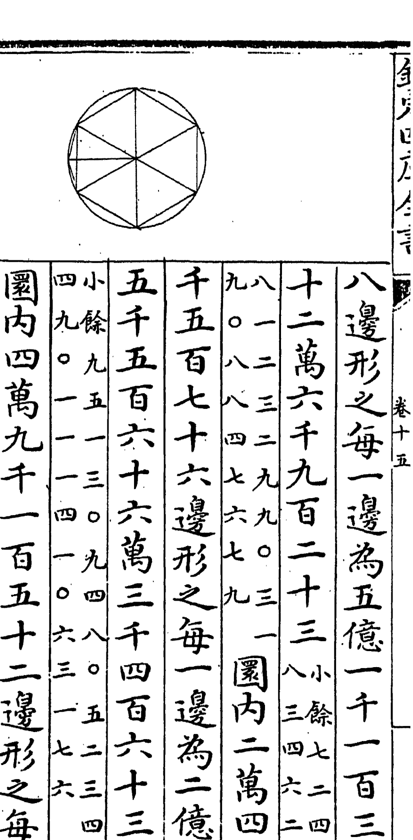
六八一二四五五七九○九七八○二○三八七圜內四十八邊形之每一邊為一千三百零八億零六百二十五萬八千四百六十零小餘二八六一三三六三○六三一一一七五五○三五○八八二八七九圜內九十六邊形之每一邊為六百五十四億三千八百一十六萬五千六百四十三小餘五五二二八四一二七三一二二八八二四一六○八六七八四三三圜內一百九十二邊形之每一邊為三百二十七億二千三百四十六萬三



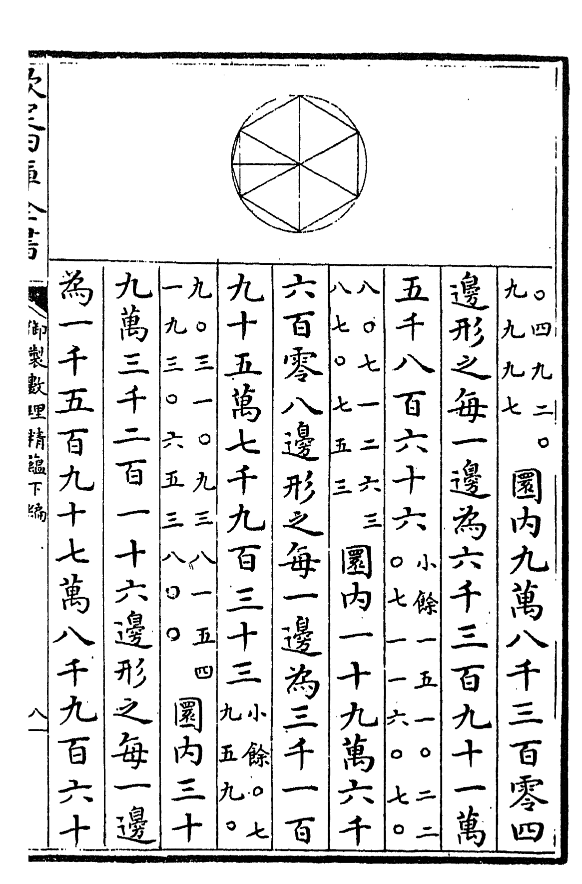
千二百五十二小餘九七三五六三二八五九二八五六五八九九一八九八三三二一三圜內三百八十四邊形之每一邊為一百六十三億六千二百二十七萬九千二百零七小餘八七四四二五八五七○三九八一四六五八九五二六六七九九六四圜內七百六十八邊形之每一邊為八十一億八千一百二十萬八千零五十二小餘四六九五七九一八九二四八二一九九一○○三六二五二三三七圜內一千五百三十六邊形之每一邊為四十億



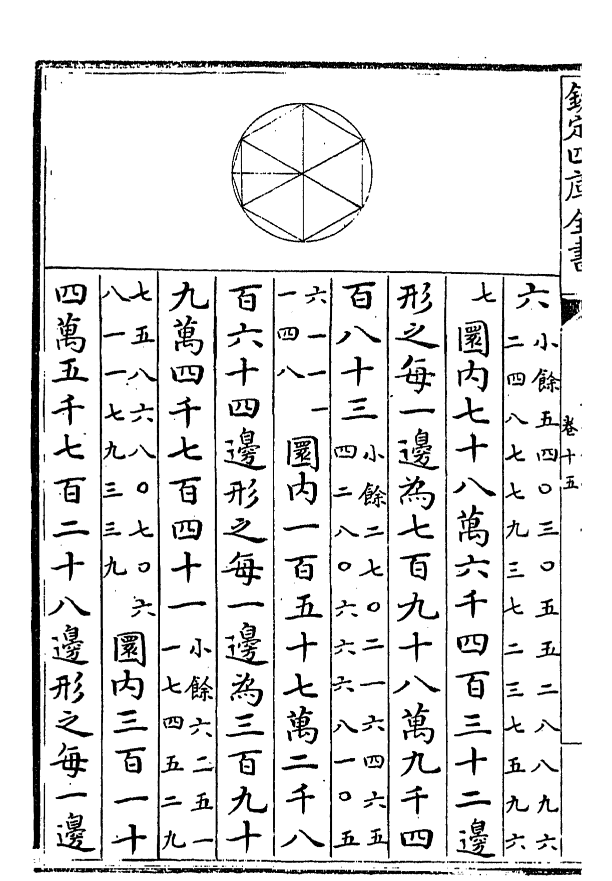
九千零六十一萬二千五百八十二小餘三二八一九〇二二八八二六一一七九六八五八五一九〇〇三九圜内三千零七十二邊形之每一邊為二十億四千五百三十萬七千三百六十零小餘六七六六〇九〇八二三八五九二二二九二一〇二〇七九〇二九圜内六千一百四十四邊形之每一邊為一十億二千二百六十五萬三千八百一十四小餘〇二七三九五〇二二〇二八五九八九五八八五二二四三九一七圜内一萬二千二百八十



八邊形之每一邊為五億一千一百三十二萬六千九百二十三小餘七二四八三四六二八一二三二九九〇三一九〇八八四七六七九圜內二萬四千五百七十六邊形之每一邊為二億五千五百六十六萬三千四百六十三小餘九五一三〇九四八〇五二三四四九〇一一四一〇六三一七六圜內四萬九千一百五十二邊形之每一邊為一億二千七百八十三萬一千七百三十二小餘二三六七六六二六一八六九四七六四六四



〇四九二〇九九九七圜内九萬八千三百零四邊形之每一邊為六千三百九十一萬五千八百六十六小餘一五一〇二二〇七一一六〇七〇八〇七一二六三八七〇七五三圜内一十九萬六千六百零八邊形之每一邊為三千一百九十五萬七千九百三十三小餘〇七九五九〇九〇三一〇九三八一五四一九三〇六五三八〇〇圜内三十九萬三千二百一十六邊形之每一邊為一千五百九十七萬八千九百六十

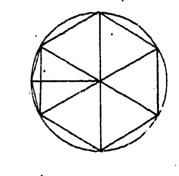


六小餘五四〇三〇五五二八八九六二四八七七九三七二三七五九六

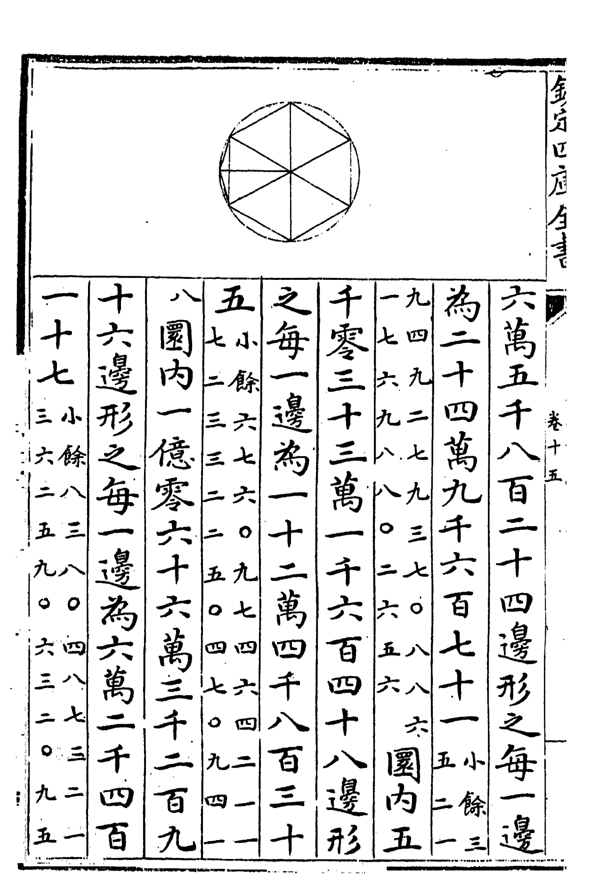
七圜内七十八萬六千四百三十二邊形之每一邊為七百九十八萬九千四百八十三小餘二七〇二一六四六五四二八〇六六六八一〇五六一一一一四八

圜内一百五十七萬二千八百六十四邊形之每一邊為三百九十九萬四千七百四十一小餘六二五一一七四五二九七五八六八〇七〇六八一一七九三三九

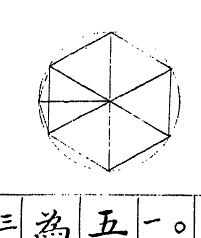
圜内三百一十四萬五千七百二十八邊形之每一邊



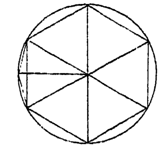
為一百九十九萬七千三百七十零小餘八一七五五九〇九六六六四〇五九二五四〇〇二八六七九六四圜内六百二十九萬一千四百五十六邊形之每一邊為九十九萬八千六百八十五小餘四〇八七七九六七二八三六一九七五五七五七四〇六一一三四圜内一千二百五十八萬二千九百一十二邊形之每一邊為四十九萬九千三百四十二小餘七〇四三八九八五一九八三三一二三六三九八二九九六三五五圜内二千五百一十



六萬五千八百二十四邊形之每一邊為二十四萬九千六百七十一小餘三五二一九四九二七九三七〇八八六一七六九八八〇二六五六圜內五千零三十三萬一千六百四十八邊形之每一邊為一十二萬四千八百三十五小餘六七六〇九七四六四二一一七二三三二二五〇四七〇九四一八圜內一億零六十六萬三千二百九十六邊形之每一邊為六萬二千四百一十七小餘八三八〇四八七三二一三六二五九〇六三二〇九五

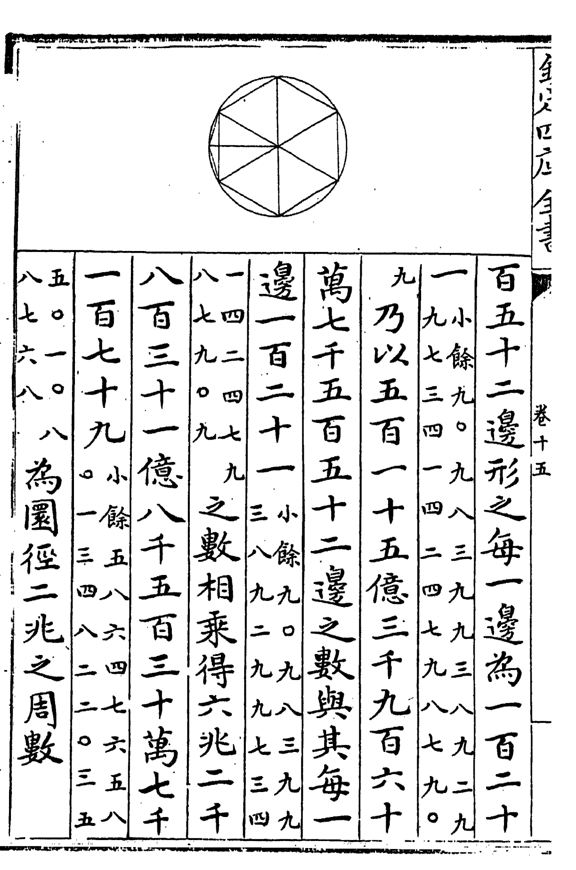


八七八四三圜內二億零一百三十二萬六千五百九十二邊形之每一邊為三萬一千二百零八小餘九一九〇二四三六六〇七一九二九二〇四二六九一一八四〇二圜內四億零二百六十五萬三千一百八十四邊形之每一邊為一萬五千六百零四小餘四五九五一二一八三〇三六四三九四九七一〇七三二〇九五一圜內八億零五百三十萬六千三百六十八邊形之每一邊為七千八百零二小餘二二九七五六〇九一五



一八二七九一五〇四八二九一五一四二圜內一十六億一千零六十一萬二千七百三十六邊形之每一邊為三千九百零一小餘一一四八七八〇四五七五九一四六九九六五八一四八七〇一五圜內三十二億二千一百二十二萬五千四百七十二邊形之每一邊為一千九百五十零小餘五五七四三九〇二二八七九五七四五二九五三四四〇六八七四圜內六十四億四千二百四十五萬零九百四十四邊形之每一邊為九

百七十五小餘二七八七一九五一一四三九七八七三二九三六四一一九九二六圜內一百二十八億八千四百九十萬一千八百八十八邊形之每一邊為四百八十七小餘六三九三五九七五五七一九八九三六七七四九八九〇九九〇五圜內二百五十七億六千九百八十萬三千七百七十六邊形之每一邊為二百四十三小餘八一九六七九八七七八五九九四六八三八七四九四五四九五三圜內五百一十五億三千九百六十萬七千五

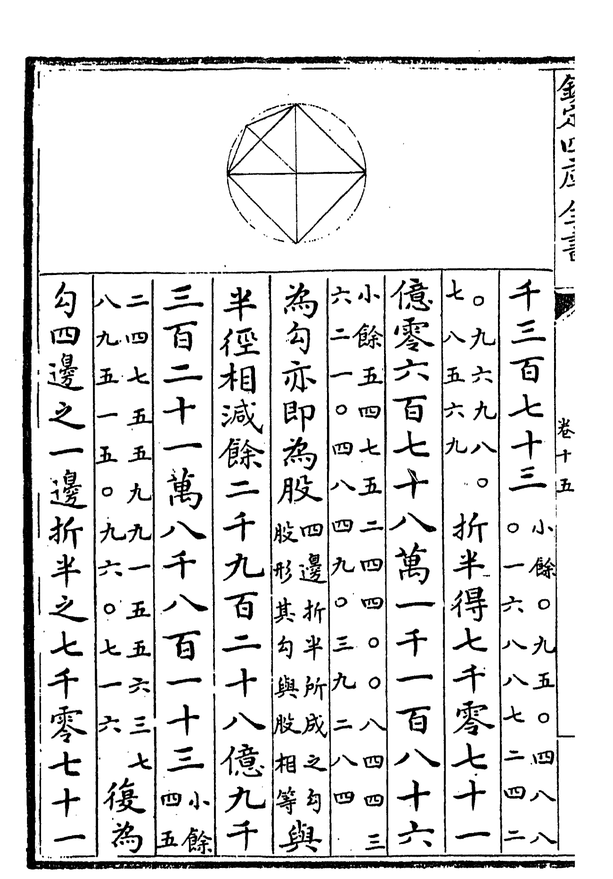


百五十二邊形之每一邊為一百二十一小餘九〇九八三九九三八九二九九七三四一四二四七九八七九〇九乃以五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊之數與其每一邊一百二十一小餘九〇九八三九九三八九二九九七三四一四二四七九八七九〇九之數相乘得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九小餘五八六四七六五八〇一三四八二二〇三五五〇一〇八八七六八為圜徑二兆之周數

圜内容四邊起算

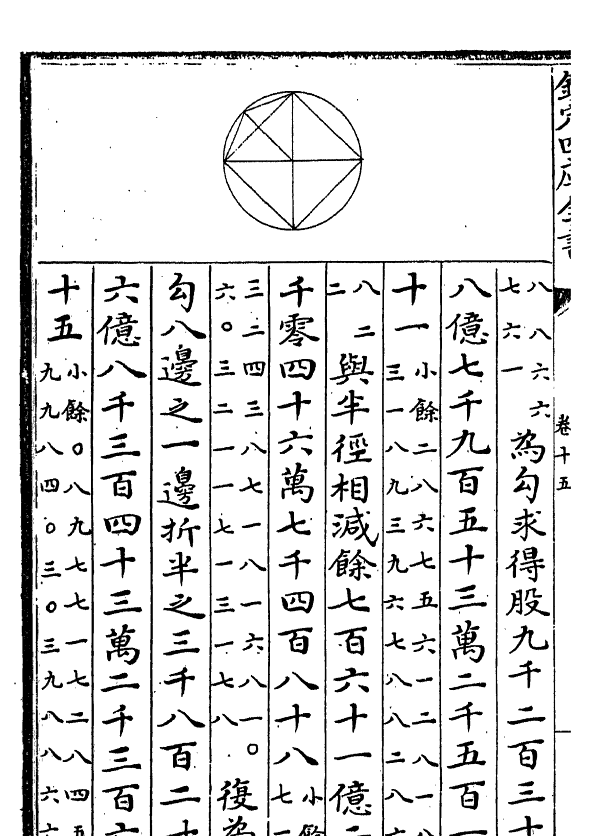
設如圜徑二兆用内容四邊起算問得圜周幾何

法以圜徑二兆折半得一兆自乘得一兆倍之開方得一兆四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三小餘〇九五〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九為圜内所容四邊形之每一邊乃以半徑一兆為弦四邊之一邊一兆四千一百四十二億一千三百五十六萬二

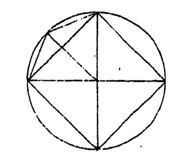
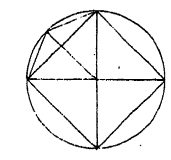


千三百七十三小餘○九五○四八八○一六八八七二四二○九六九八○七八五六九折半得七千零七十一億零六百七十八萬一千一百八十六小餘五四七五二四四○○八四四三六二一○四八四九○三九二八四為勾亦即為股四邊折半所成之勾股形其勾與股相等與半徑相減餘二千九百二十八億九千三百二十一萬八千八百一十三小餘四五二四七五五九九一五五六三七八九五一五○九六○七一六復為勾四邊之一邊折半之七千零七十一

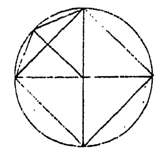
億零六百七十八萬一千一百八十六小餘五四七五二四四八四四三六二一四八四九三九二八四為股求得弦七千六百五十三億六千六百八十六萬四千七百三十零小餘一七九五四三四五六九一九九六八六七九七七三三五二三為圓內所容八邊形之每一邊復以半徑一兆為弦八邊之一邊折半得三千八百二十六億八千三百四十三萬二千三百六十五小餘八九七七一七二八四五九九八四三三九



八八六六七六一為勾求得股九千二百三十八億七千九百五十三萬二千五百一十一小餘二八六七五六一二八一八三一八九三九六七八八二八六八二二與半徑相減餘七百六十一億二千零四十六萬七千四百八十八小餘七一三二四三八七一八一六八一〇六〇三二一一七一三一七八復為勾八邊之一邊折半之三千八百二十六億八千三百四十三萬二千三百六十五小餘〇八九七七一七二八四五九九八四〇三〇三九八八六六

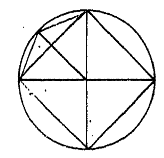



七六一為股求得弦三千九百零一億八千零六十四萬四千零三十二小餘二五六五三五六九六五六九七三六九五四〇四四四八一八五五為圜內所容十六邊形之每一邊如是屢求得圜內三十二邊形之每一邊為一千九百六十億三千四百二十八萬零六百五十九小餘一二一二〇三九八八三九一一二七七七七二八三六九一七二二圜內六十四邊形之每一邊為九百八十一億三千五百三十四萬八

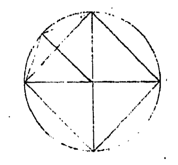


千六百五十四小餘八三六〇二八五〇九九一五〇七三五四一九二一八〇四五八六圜内一百二十八邊形之每一邊為四百九十億八千二百四十五萬七千零四十五小餘八二四五七六〇六三四七一六二一〇六二〇八五七五四一三二圜内二百五十六邊形之每一邊為二百四十五億四千三百零七萬六千五百七十一小餘四三九八五二一五八八一七八〇五二八三二二七〇七一六〇〇圜内五百一十二邊形之每一邊為一百二

十二億七千一百七十六萬九千二百九十八小餘三○八九五○七一九二八一一○九八九七五三九一五○二八七圜内一千零二十四邊形之每一邊為六十一億三千五百九十一萬三千五百二十五小餘九三四八一八四○○九三五六一三五六一一八八八五○三一八圜内二千零四十八邊形之每一邊為三十億六千七百九十六萬零三百七十二小餘五六九五三一二二四六○七五五四四八二五五三五七八○五四圜内四千零九



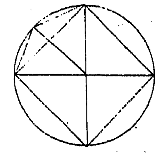
十六邊形之每一邊為一十五億三千三百九十八萬零六百三十七小餘四八五四○九○五三八七七二一六八○六九八○五三六五二九圜内八千一百九十二邊形之每一邊為七億六千六百九十九萬零三百七十五小餘一四二七九一一七八一四四九六三四○七九一三二八八三一一圜内一萬六千三百八十四邊形之每一邊為三億八千三百四十九萬五千一百九十四小餘六二一四○六六一四八七九八三九一四六七五



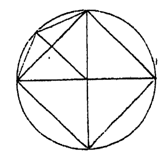
四三七〇三三三圜內三萬二千七百六十八邊形之每一邊為一億九千一百七十四萬七千五百九十八小餘一九一九五四六九一七四一〇四四四三三三四一二七四三一七圜內六萬五千五百三十六邊形之每一邊為九千五百八十七萬三千七百九十九小餘二〇六一三三七六九〇九八〇一二九八六六八三四九五八〇七圜內一十三萬一千零七十二邊形之每一邊為四千七百九十三萬六千八百九十

九小餘六一六八三六四三七四五八三七五六五七一七七一三四八二七圓內二十六萬二千一百四十四邊形之每一邊為二千三百九十六萬八千四百四十九小餘八一〇一三九四一二八四三〇四四三七四六一七五二八三三〇圓內五十二萬四千二百八十八邊形之每一邊為一千一百九十八萬四千二百二十四小餘九〇五二八四八五五六八五七六〇〇四九三二九五五四六八八圓內一百零四萬八千五百七十六邊形之每一

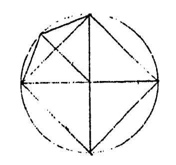
邊為五百九十九萬二千一百一十二小餘四五二六六九三二一五〇〇九〇九九三八七二六〇〇六〇六五圜內二百零九萬七千一百五十二邊形之每一邊為二百九十九萬六千零五十六小餘二二六三三八〇二二四五三九五七七〇八七一四一二〇二六六圜內四百一十九萬四千三百零四邊形之每一邊為一百四十九萬八千零二十八小餘一一三一六九四七五三四七四三一四四二二六一〇三二九三三圜內八百三十八萬八



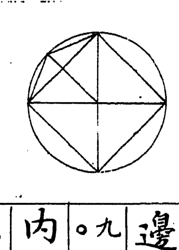
千六百零八邊形之每一邊為七十四萬九千零一十四小餘○五六五八四七六八二四七八○六三七七四六五一五五○七七圜内一千六百七十七萬七千二百一十六邊形之每一邊為三十七萬四千五百零七小餘○二八二九二三九○六八九七三七六六八七○六六八○○三二圜内三千三百五十五萬四千四百三十二邊形之每一邊為一十八萬七千二百五十三小餘五一四一四六一九六一六五五九八一四四三五○一○八二二



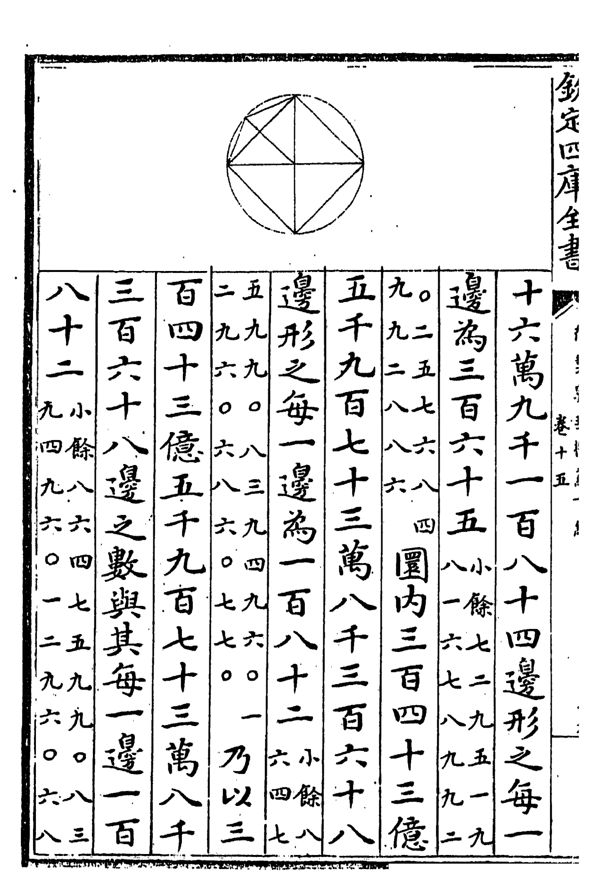
四圜內六千七百一十萬八千八百六十四邊形之每一邊為九萬三千六百二十六小餘七五七〇七三〇九八一五〇三八五三九〇二三五九二四六〇六圜內一億三千四百二十一萬七千七百二十八邊形之每一邊為四萬六千八百一十三小餘三七八五三五一九〇一三四三六五四九一〇五一〇二四六八二圜內二億六千八百四十三萬五千四百五十六邊形之每一邊為二萬三千四百零六小餘六八九二



六八二七四五五四三六二四
九三六四九〇九九七八四
圜內五億三千六百八十七萬零九百一十二邊形之每一邊為一萬一千七百零三
小餘三四四六三四一三七二七七三
八一六二〇一九一二四八三二一
圜內一十億七千三百七十四萬一千八百二十四邊形之每一邊為五千八百五十一
小餘六七二三一七〇六八
六三八七一五八五六七六
六四六一
四六四
圜內二十一億四千七百四十八萬三千六百四十八邊形之每一

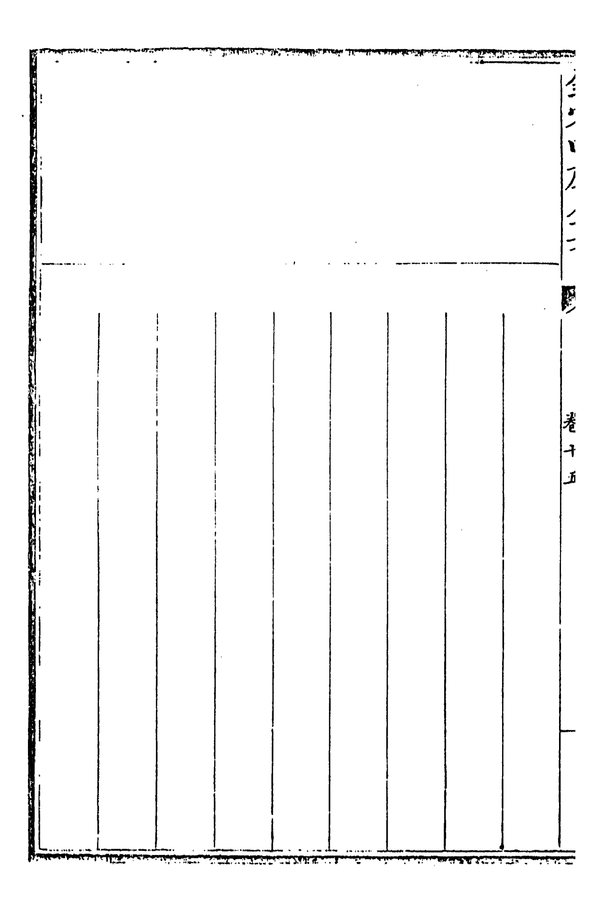


邊為二千九百二十五小餘八三六一五八五三四三一九三六一〇五九二一七〇八五三九四圜内四十二億九千四百九十六萬七千二百九十六邊形之每一邊為一千四百六十二小餘九一八〇七九二六七一五九六八〇九二〇九六二七七四五二九圜内八十五億八千九百九十三萬四千五百九十二邊形之每一邊為七百三十一小餘四九五〇三九六三三五七九八四〇五〇三一四〇一六六〇二七圜内一百七十一億七千九百八



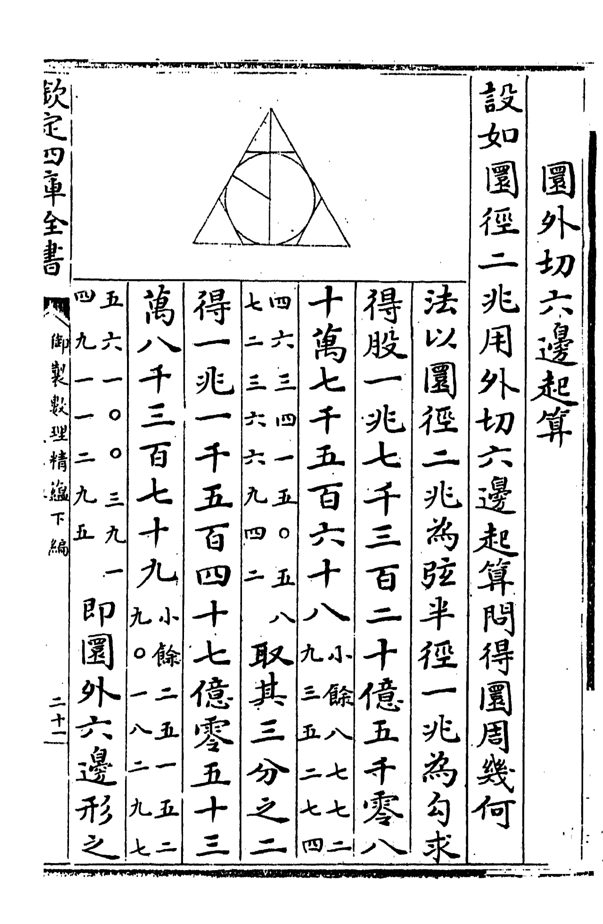
十六萬九千一百八十四邊形之每一邊為三百六十五小餘七二九五一九八一六七八九九二○二五七六八四九九二八八六圜內三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊形之每一邊為一百八十二小餘八六四七五九九○八三九四九六○一二九六○六八六○七七○乃以三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊之數與其每一邊一百八十二小餘八六四七五九九○八三九四九六○一二九六○六八

六〇七七〇之數相乘得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九小餘五八六四七六八六三〇八三一〇六七五五〇〇三〇二三三六〇為圜徑二兆之周數

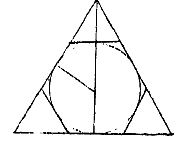


圜外切六邊起算

設如圜徑二兆用外切六邊起算問得圜周幾何

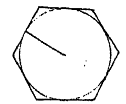


法以圜徑二兆為弦半徑一兆為勾求得股一兆七千三百二十億五千零八十萬七千五百六十八小餘八七七二九三五二七四四六三四一五〇五八七二三六六九四二取其三分之二得一兆一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九一一二九五即圜外六邊形之

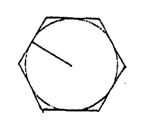


每一邊蓋圜徑為弦半徑為勾所得股即圜外三邊形之每邊之一半倍之為圜外三邊形之每一邊其每一邊之三分之一即圜外六邊形之每一邊今以六邊起算故省求三邊止以所得之股取其三分之二為六邊形之每一邊也乃以六邊形之每一邊一兆一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九一一二九五折半得五千七百七十三億五千零二十六萬九千一百八十九小餘六二五七六四五〇九一四八七八〇五〇一九五七四五五六四七為勾

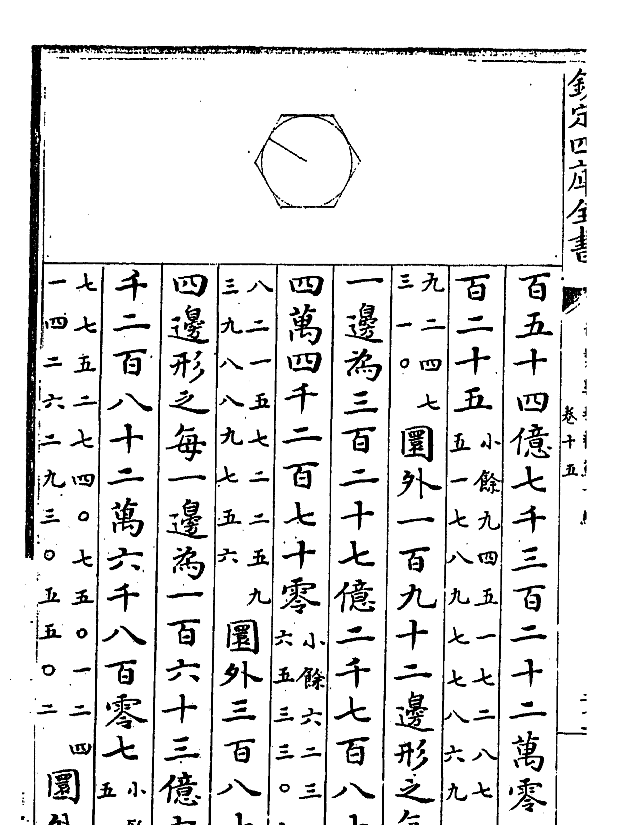
半徑一兆為股即用六邊之一邊為弦圜內六邊與半徑等圜外六邊亦與本形半徑等故即用六邊之一邊為弦也與半徑相減餘一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九一一二九五即股弦較又即小同式形之勾倍以六邊形之一邊折半之勾五千七百七十三億五千零二十六萬九千一百八十九小餘六二五七六四五〇九一四八七八〇五〇一九五七四五五六四七為一率



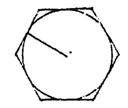
半徑之股一兆為二率小同式形之勾一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九小餘二五一五二九〇一九一四九一八二九七五六一〇〇三一二九五為三率推得四率二千六百七十九億四千九百一十九萬二千四百三十一小餘一二二七〇六四七一二七六三二五五三六五八四九四三〇五七為小同式形之股倍之得五千三百五十八億九千八百三十八萬四千八百六十二小餘二四五四一二九四五一〇七



三一六九八八二五五二六六一一四為圜外十二邊形之每一邊如是屢求得圜外二十四邊形之每一邊為二千六百三十三億零四百九十九萬五千一百七十四小餘七九一七〇六九四三〇五二九一四八一九四三四二〇七一八四圜外四十八邊形之每一邊為一千三百一十億八千六百九十二萬五千六百三十零小餘四七六四五七一二九〇八七四四九七五九八八五五八九八四二圜外九十六邊形之每一邊為六



百五十四億七千三百二十二萬零八百二十五小餘九四五一七二八七八五一七八九七七八六九一九二四七三一〇圜外一百九十二邊形之每一邊為三百二十七億二千七百八十四萬四千二百七十零小餘六二三一六五三三〇六八二一五七二二五九三九八八九七五六圜外三百八十四邊形之每一邊為一百六十三億六千二百八十二萬六千八百零七小餘五八七七五二七四〇七五〇一二四一四二六二九三〇五五〇二圜外



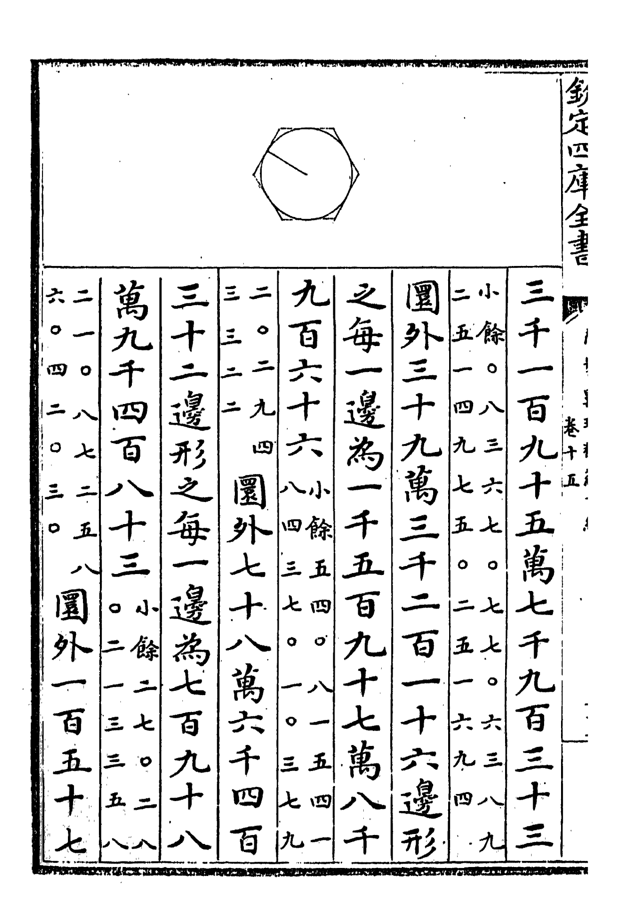
七百六十八邊形之每一邊為八十一億八千一百二十七萬六千五百零一小餘五七四七一二三四〇五二八六五四七〇二〇六三七八四二四六

圜外一千五百三十六邊形之每一邊為四十億九千零六十二萬一千一百三十八小餘四三九四八七一七七〇〇八六七三八九五七六二五〇九三七〇

圜外三千零七十二邊形之每一邊為二十億四千五百三十萬八千四百三十零小餘一八九六八二三〇九八七九八九二〇四九

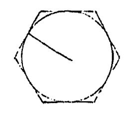
四〇七三〇一四三八圜外六千一百四十四邊形之每一邊為一十億二千二百六十五萬三千九百四十七小餘七一六五〇二九四〇六〇七九二三六一七〇八二四〇〇七六八圜外一萬二千二百八十八邊形之每一邊為五億一千一百三十二萬六千九百四十零小餘四三五九七二三〇一一六二四八九八六三九六七三七八二六二圜外二萬四千五百七十六邊形之每一邊為二億五千五百六十六萬三千四

百六十六小餘〇四〇二〇一六六四〇五二四五三七一九三三九一五〇五八二圜外四萬九千一百五十二邊形之每一邊為一億二千七百八十三萬一千七百三十二小餘四九七八七七七八四〇一〇五六〇七七四〇一〇四六二三四八圜外九萬八千三百零四邊形之每一邊為六千三百九十一萬五千八百六十六小餘一八三六六一〇一一四〇三三三五六四一三七七六七八四八四圜外一十九萬六千六百零八邊形之每一邊為



三千一百九十五萬七千九百三十三小餘〇八三六七〇七七〇六三八九二五一四九七五〇二五一六九四圜外三十九萬三千二百一十六邊形之每一邊為一千五百九十七萬八千九百六十六小餘五四〇八一五四一八四三七〇一〇三七九二〇二九四三三二二圜外七十八萬六千四百三十二邊形之每一邊為七百九十八萬九千四百八十三小餘二七〇二八〇二一三三五八二一〇八七二五八六〇四二〇三〇圜外一百五十七

萬二千八百六十四邊形之每一邊為三百九十九萬四千七百四十一小餘六三五一二四一六九六九六五六九○二八一四八七○四五五八圜外三百一十四萬五千七百二十八邊形之每一邊為一百九十九萬七千三百七十零小餘八一七五六○○九二七二五四六七四七四九七七六四四三五四圜外六百二十九萬一千四百五十六邊形之每一邊為九十九萬八千六百八十五小餘四○八七七九七九七三四七三八一六



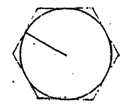
○七九七四二七五二九八圜外一千二百五十八萬二千九百一十二邊形之每一邊為四十九萬九千三百四十二小餘七○四三八九八六七五四六七七一七八七八○九四六一二一四圜外二千五百一十六萬五千八百二十四邊形之每一邊為二十四萬九千六百七十一小餘三五二一九四九二九八八二五二一○六八八二八八四八八六二圜外五千零三十三萬一千六百四十八邊形之每一邊為一十二萬四千

八百三十五小餘六七六〇九七四六四四五四九〇二三九八

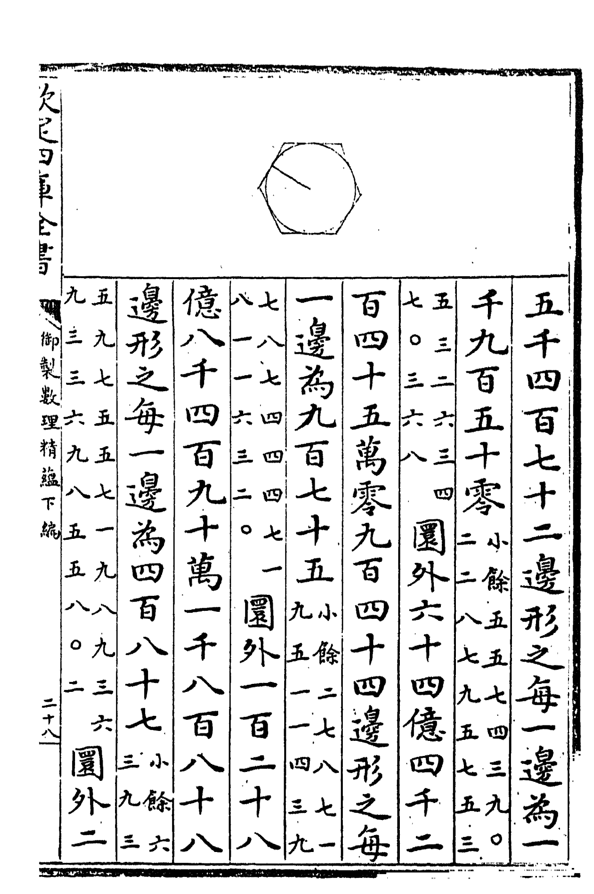
八一三七二三〇八二圜外一億零六十六萬三千二百九十六邊形之每一邊為六萬二千四百一十七小餘八三八〇四八七三二一六六六五

六四三五七〇三三九六九七六圜外二億零一百三十二萬六千五百九十二邊形之每一邊為三萬一千二百零八小餘九一九〇二四三六

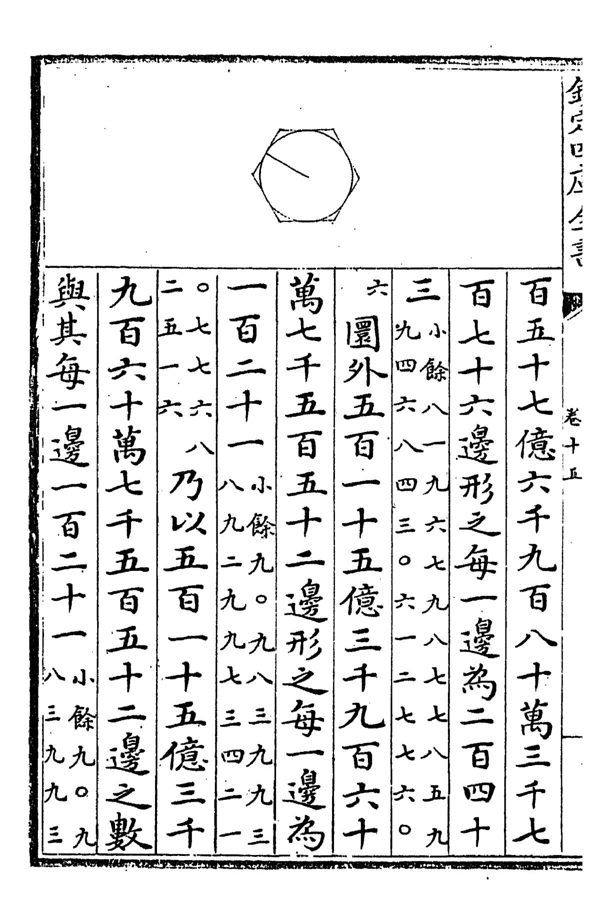
六〇七五七二八八七二三八八七六五四二八圜外四億零二百六十五萬三千一百八十四邊形



之每一邊為一萬五千六百零四小餘四五九五一二一八三〇三六九一四五一八〇一一五一六〇八〇圜外八億零五百三十萬六千三百六十八邊形之每一邊為七千八百零二小餘二二九七五六〇九一五一八二三八五一九二三二八九九七一〇圜外一十六億一千零六十一萬二千七百三十六邊形之每一邊為三千九百零一小餘一一四八七八〇四五七五九一五四四一七一四四八四二五六二圜外三十二億二千一百二十二萬



五千四百七十二邊形之每一邊為一千九百五十零小餘五五七四三九〇二二八七九五七五三五三二六三四七〇三六八圜外六十四億四千二百四十五萬零九百四十四邊形之每一邊為九百七十五小餘二七八七一九五一一四三九七八七四四七一八一一六三二〇圜外一百二十八億八千四百九十萬一千八百八十八邊形之每一邊為四百八十七小餘六三九三五九七五五七一九八九三六九三三六九八五五八〇二圜外二



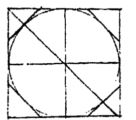
百五十七億六千九百八十萬三千七百七十六邊形之每一邊為二百四十三小餘八一九六七九八七七八五九九四六八四三〇六一二七七六〇六圜外五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊形之每一邊為一百二十一小餘九〇九八三九九三八九二九九七三四二一〇七七六八二五一六乃以五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊之數與其每一邊一百二十一小餘九〇九八三九九三

八九二九九七三四二一〇七七六八二五一六之數相乘得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九小餘五八六四七六九三二一五四六〇一七七八二八三九六〇八三二為圜徑二兆之周數

圜外切四邊起算

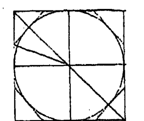
設如圜徑二兆用外切四邊起算問得圜周幾何

法以圜徑二兆為外切四邊形之每一邊乃以圜徑二兆為股亦即為勾求得弦二兆八千二百八十四億二千七百一十二萬四千七百四十六小餘一九○○九七六○三三七七四四八四一九三九六一五七一三八為圜外四邊形之斜弦與圜徑相減餘八千二百八十四億二千七百一十二萬四千七



百四十六小餘一九〇〇九七六〇三三七七四四八四一九三九六一五七一三八即圜外八邊形之每一邊又以八邊形之每一邊八千二百八十四億二千七百一十二萬四千七百四十六小餘一九〇〇九七六〇三三七七四四八四一九三九六一五七一三八折半得四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三小餘〇九五〇〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九為勾半徑一兆為股求得弦一兆零八百二十

三億九千二百二十萬零二百九十二小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一與半徑相減餘八百二十三億九千二百二十萬零二百九十二小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一即股弦較又即小同式形之勾復以八邊形之一邊折半之勾四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三小餘〇九五〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九為一率



半徑之股一兆為二率小同式形之勾八百二十三億九千二百二十萬零二百九十二小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一為三率推得四率一千九百八十九億一千二百三十六萬七千三百七十九小餘六五八〇〇六九一一五九七六二二六四四六七六二二八五九七為小同式形之股倍之得三千九百七十八億二千四百七十三萬四千七百五十九小餘三一六〇一三八二三一九五二四

五二八九三五二四五七一九四為圜外十六邊形之每一邊如是屢求得圜外三十二邊形之每一邊為一千九百六十九億八千二百八十萬六千七百一十四小餘三二八五〇六一五四三九五〇四二五八二六五四八六四五八四圜外六十四邊形之每一邊為九百八十二億五千三百六十九萬九千五百三十八小餘九三四五〇八二一〇六八六六四二五四二六二七二三四一五八圜外一百二十八邊形之每一邊為四

百九十億九千七百二十四萬四千二百一十七小餘八五〇八八八二〇九一五九五〇七九二一八一七四四二三八四

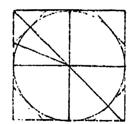
圜外二百五十六邊形之每一邊為二百四十五億四千四百九十二萬四千七百五十九小餘一三二五五〇四六一七七五一〇六四六八五四一五九二八九〇

圜外五百一十二邊形之每一邊為一百二十二億七千二百萬零三百一十五小餘二四六八〇三九二八五八八七三一二〇二六二一六七〇五八二

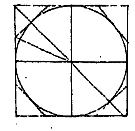
圜外一千零

二十四邊形之每一邊為六十一億三千五百九十四萬二千四百零二小餘八四五三二九九七四一四七八三一三六四二四三四七六五八四圜外二千零四十八邊形之每一邊為三十億六千七百九十六萬三千九百八十二小餘一七七三三三〇五六九八五四四一六三六七〇〇八七四九四四圜外四千零九十六邊形之每一邊為一十五億三千三百九十八萬一千零八十八小餘六八六一八五二一〇三四六四一五四二三二五

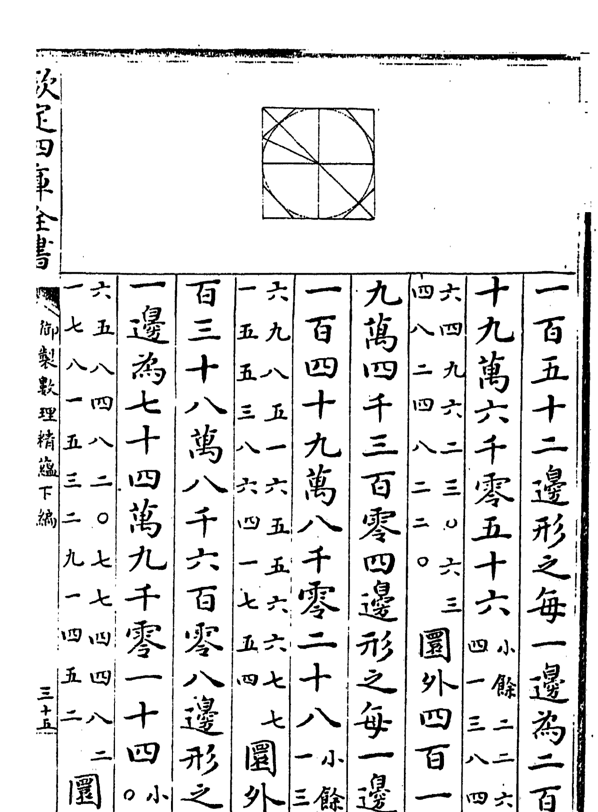
五八四七 / 五三八 圜外八千一百九十二邊形之每一邊為七億六千六百九十九萬零四百三十一 小餘五四二八八一九 / 七六六九一四六八三 六八一五四四 / 三九三二〇 圜外一萬六千三百八十四邊形之每一邊為三億八千三百四十九萬五千二百零一 小餘六七一 / 四一七七七 〇二九一五五一二一 / 七二六一八二一〇 圜外三萬二千七百六十八邊形之每一邊為一億九千一百七十四萬七千五百九十九



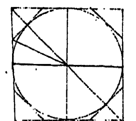
小餘〇七三二〇六〇八〇〇九二二九六〇九三一四五一四六一〇六圜外六萬五千五百三十六邊形之每一邊為九千五百八十七萬三千七百九十九小餘三一六二九〇一九二四五二〇六五五二六二〇七六一九八五八圜外一十三萬一千零七十二邊形之每一邊為四千七百九十三萬六千八百九十九小餘六三〇六〇五九九〇三七一六九七五二九八八九四六二九四四圜外二十六萬二千一百四十四邊形之每一邊為二千三



百九十六萬八千四百四十九小餘八一一八六〇六〇六九五七〇二三二六九五八九三〇一三二〇圜外五十二萬四千二百八十八邊形之每一邊為一千一百九十八萬四千二百二十四小餘九〇五五〇〇〇四九五〇〇〇一一四八一五〇〇二三三六六圜外一百零四萬八千五百七十六邊形之每一邊為五百九十九萬二千一百一十二小餘四五二六九六二一五一五八九三九六六〇一二八〇二〇一五四圜外二百零九萬七千



一百五十二邊形之每一邊為二百九十九萬六千零五十六小餘二二六三四一三八四一六四九六二三〇六三四八二四八二二〇圓外四百一十九萬四千三百零四邊形之每一邊為一百四十九萬八千零二十八小餘一一三一六九八五一六五五六六七七一五五三八六四一七五四圓外八百三十八萬八千六百零八邊形之每一邊為七十四萬九千零一十四小餘〇五六五八四八二〇七七四四八二一七八一五三二九一四五二圓外

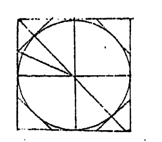


一千六百七十七萬七千二百一十六邊形之每一邊為三十七萬四千五百零七小餘。二八二九二三九七二五五五七二一二九一二七四。四七三。

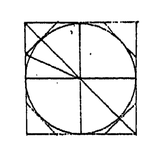
圜外三千三百五十五萬四千四百三十二邊形之每一邊為一十八萬七千二百五十三小餘五一四一四六一九六九八六三二七四四五七。一三三五七四

圜外六千七百一十萬八千八百六十四邊形之每一邊為九萬三千六百二十六小餘七五七。七三。九八二

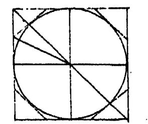
八七九八一三九四七八五八七三三八六圜外一億三千四百二十一萬七千七百二十八邊形之每一邊為四萬六千八百一十三小餘三七八五三六五四九一一八三五二九〇六四五五五三七六〇二圜外二億六千八百四十三萬五千四百五十六邊形之每一邊為二萬三千四百零六小餘六八九二六八二七四五五五九六五四七九三六〇五九三九一六圜外五億三千六百八十七萬零九百一十二邊形之每一邊為一萬



一千七百零三小餘三四四六三四一三七二七七五八一九九二九四六九○○○九六圜外一十億七千三百七十四萬一千八百二十四邊形之每一邊為五千八百五十一小餘六七二三一七○六八六三八七四○九○三一三一七七五四四○圜外二十一億四千七百四十八萬三千六百四十八邊形之每一邊為二千九百二十五小餘八三六一五八五三四三一九三六四一八九八九八一七八三九四圜外四十二億九千四百九十六萬七



千二百九十六邊形之每一邊為一千四百六十二小餘九一八〇七九二六七一五九六八一三九八三六九八五〇二五二圜外八十五億八千九百九十三萬四千五百九十二邊形之每一邊為七百三十一小餘四五九〇三九六三三五七九八四〇六〇一三四六三六七一六六圜外一百七十一億七千九百八十六萬九千一百八十四邊形之每一邊為三百六十五小餘七二九五一九八一六七八九九二〇二八八四四三三六三八三八圜外



三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊形之每一邊為一百八十二小餘八六四七五九九〇八三九四九六〇一四二六九二九五四四五〇乃以三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊之數與其每一邊一百八十二小餘八六四七五九九〇八三九四九六〇一四二六九二九五四四五〇之數相乘得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九小餘五八六四七七三一二七一七

八六一八五八九四為圜徑二兆之周

一三三七六〇〇

數

御製數理精藴下編卷十五

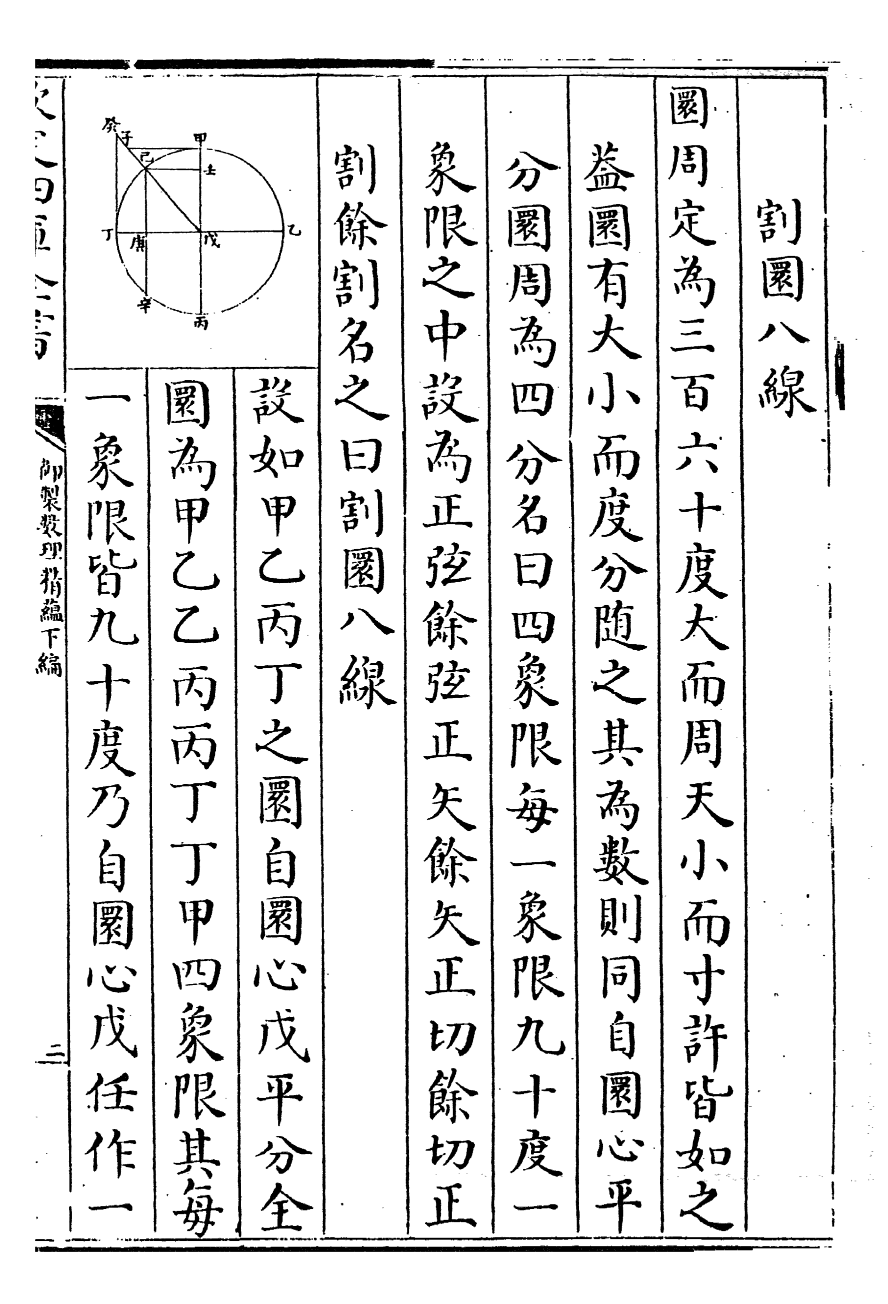
御製數理精蘊下編卷十六

面部

割圜

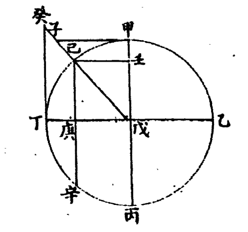
割圜八線

圜周定為三百六十度大而周天小而寸許皆如之葢圜有大小而度分隨之其為數則同自圜心平分圜周為四分名曰四象限每一象限九十度一象限之中設為正弦餘弦正矢餘矢正切餘切正割餘割名之曰割圜八線

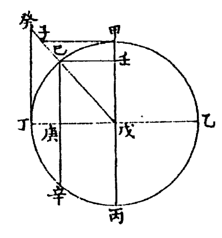


設如甲乙丙丁之圜自圜心戊平分全圜為甲乙乙丙丙丁丁甲四象限其每一象限皆九十度乃自圜心戊任作一

戊巳半徑則將甲丁九十度之弧分為甲巳巳丁二段巳戊丁角所對之弧甲巳為甲戊巳角所對之弧如命巳戊丁為正角則甲戊巳為餘角甲戊巳為正角則巳戊丁為餘角正角所對為正弧餘角所對為餘弧今以巳丁為正弧故甲巳為餘弧又自巳與甲丙全徑平行作巳辛線謂之通弦其對巳丁正弧而立於戊丁半徑者曰正弦又與



戊丁半徑平行作壬已線謂之餘弦以其為甲已餘弧之所對也於戊丁半徑内減戊庚餘庚丁謂之正矢於甲戊半徑内減壬戊餘甲壬謂之餘矢自圜界與甲戊半徑平行立於戊丁半徑之末作垂線仍與已戊丁角相對者曰正切將已戊半徑引長與正切相遇於癸成戊癸線謂之正割又自圜界與戊丁半徑平行作甲子線謂之餘切戊癸正割



被甲子餘切截於子所分戊子謂之餘割每一角一弧即有正弦餘弦正矢餘矢巳戊成四線於圜界之内復引出半徑於圜界之外而成正切餘切正割餘割之四線内外共為八線故曰割圜八線逐度逐分正弧之餘即為餘弧之正餘弧之正即為正弧之餘是以前四十五度之八線正餘互相對待為用不必復求後四十五度之八線也凡此八線皆

九十度以内鋭角之所成若直角九十度者則不能成八線葢因半徑即九十度之正弦甲戊半徑即甲丁弧之弦而切線割線為平行終無相遇之處也若鈍角過九十度以外者則於半周一百八十度内減其角度用其餘度之八線即如已庚為已丁弧之正弦亦即乙已弧之正弦也要之八線以正弦為本有正弦則諸線皆由此生故六宗三要皆

係正弦之法

六宗三要 二簡法附

西洋歷算家作割圜八線表始自圜內容六邊四邊十邊三邊五邊十五邊名曰六宗蓋用圜徑求各等邊形之一邊為相當弧之通弦以為立表之原故謂之宗然六者實本於三如六邊形之一邊即圜之半徑不藉他求數無零餘而理最易見此其一也四邊形之一邊則為半徑所作正方形之對角斜弦此又其一也十邊形之一邊則為半徑所作連比例三率之中率西法謂之理分中末線此又其一也至於三

邊形則出於六邊五邊形則出於十邊十五邊形則又出於三邊及五邊非别自立一法也既得此六種形之一邊各半之即得六種弧之各正弦爰命此六種弧為本弧按法可求本弧之餘弦可求倍本弧之正弦餘弦亦可求半本弧之正弦餘弦是為三要又以不等两弧之正弦餘弦求相加相减弧之正弦又两弧距六十度前後之度等得其两正弦之較即得距弧之正弦是又名為二簡法由此錯綜之可得正弦一百二十其中最小者為四十五分之弦其次一

度三十分又次為二度十五分又次為三度如此每越四十五分而得一弦其自一分至四十四分之弦則以比例求之因弧分甚微與直線所差無幾故以弦求弦而得之此西法立割圜八線表之大綱也爾來西法對數表内有設連比例四率以求圜内容七邊九邊二法因推廣其理於六宗之外增求圜内容十八邊形十四邊形之法俱以半徑為首率求連比例四率之第二率即十八邊形十四邊形之每一邊而七邊又因之以生亦猶三邊之出於六邊五

邊之出於十邊也有此二形與六宗相參伍可得正弦三百六十其中最小者為十五分之正弦又增一法求十五分之三分之一五分之正弦所少者止一分至四分之正弦較之四十五分為尤密可知矣今以六宗三要二簡法理分中末線并新增數法皆按類具例於左

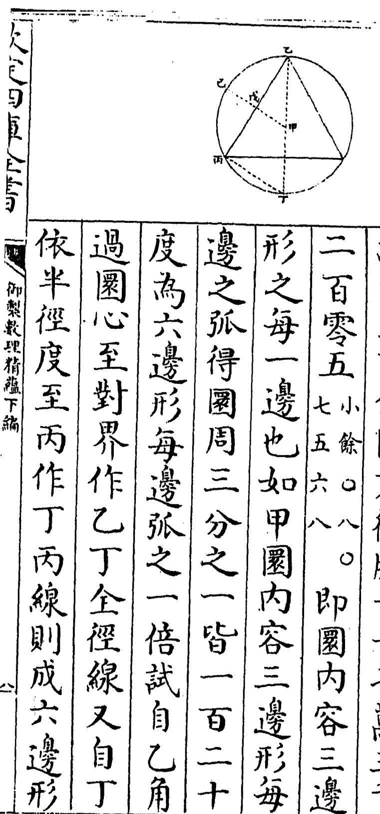
六宗 圜內容六邊形四邊形三邊形十邊形五邊形十五邊形

設如圜徑二十萬求內容六邊形之一邊幾何

法以圜徑二十萬折半得半徑十萬即圜內容六邊形之每一邊也如甲圜內容六邊形每邊之弧得圜周六分之一皆六十度試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線成甲乙丙三角形則甲角所對之弧為六十度而甲乙甲丙兩腰俱為半徑既相等則乙角

丙角亦必相等而各為六十度矣三角既等則三邊亦必相等故乙丙邊即與甲乙甲丙半徑相等也乙丙弧既為六十度則乙丙邊十萬為六十度之通弦折半得乙丁五萬即乙戊弧三十度之正弦也此即六邊起算之理前設圜徑為二兆者所以求其密合今設圜徑為二十萬所以取其便於用也

設如圜徑二十萬求內容三邊形之一邊幾何



法以圜徑二十萬為弦自乘得四百億又以半徑十萬為勾自乘得一百億相減餘三百億開方得股一十七萬三千二百零五小餘〇八〇七五六八即圜內容三邊形之每一邊也如甲圜內容三邊形每邊之弧得圜周三分之一皆一百二十度為六邊形每邊弧之一倍試自乙角過圜心至對界作乙丁全徑線又自丁依半徑度至丙作丁丙線則成六邊形

之每一邊其丙丁弧即為三邊形之每邊弧之一半而丙角立於圜界之一半必為直角故半徑為勾全徑為弦求得股即三邊形之每一邊也乙丙弧既為一百二十度則乙丙邊一十七萬三千二百零五（小餘〇八〇七五六八）為一百二十度之通弦折半得乙戊八萬六千六百零二（小餘五四〇三七八四）即乙己弧六十度之正弦也

設如圜徑二十萬求内容四邊形之一邊幾何

法以圜徑二十萬折半得半徑十萬自乘得一百億倍之得二百億開方得一十四萬一千四百二十一小餘三五六二三七三即圜内容四邊形之每一邊也如甲圜内容四邊形每邊之弧得圜周四分之一皆九十度試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線成甲乙丙勾股形若命甲乙半徑為股則甲丙半

徑為勾若命甲丙半徑為股則甲乙半徑為勾因勾股皆為半徑故以半徑自乘倍之開方而得弦即如勾股各自乘并之開方而得弦也乙丙弧既為九十度則乙丙邊一十四萬一千四百二十一小餘三五六二三七三為九十度之通弦折半得乙丁七萬零七百一十小餘六七八一一八六即乙戊弧四十五度之正弦也

理分中末線此西法名也因命一線為首率將此首率分為大小兩分大分為中

率小分為末率與原線共為相連比例三率故謂之理分中末線也

設如以十萬為首率作相連比例三率使中率末率相加與首率等求中率末率各幾何

首率 一〇〇〇〇〇

中率 六一八〇三

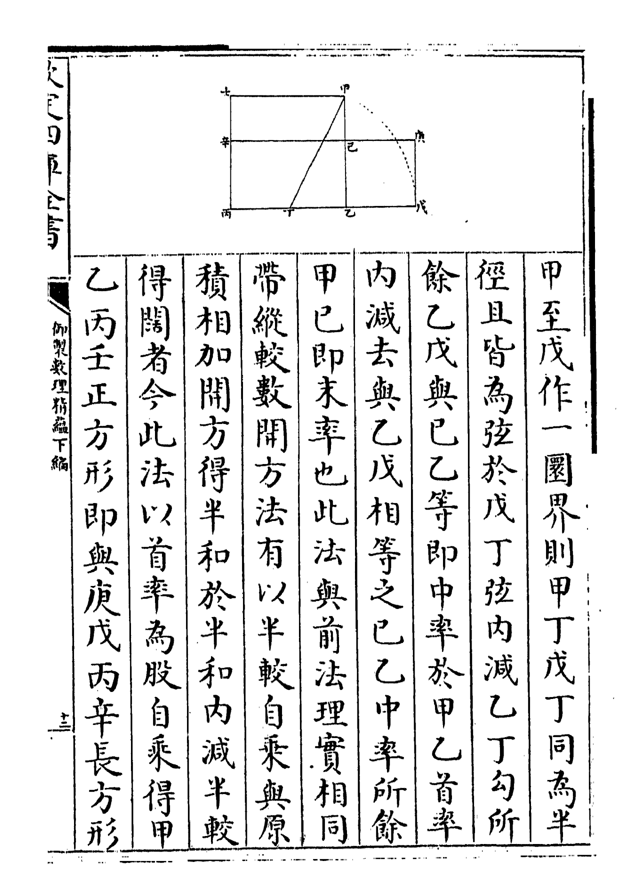
末率 三八一九七

法以十萬自乘得一百億為長方積以十萬為長闊之較用帶縱較數開方法算之得闊六萬一千八百零三即相連比例之中率以中率與首率十萬相減餘三萬八千一百九十七即相連比例之末率也此法蓋因連比例三率之首

率末率相乘之長方積與中率自乘之正方積等而首率之中有一中率一末率之數故首率自乘之一正方積中有首率中率相乘之一長方又有首率末率相乘之一長方即如甲乙為首率丙乙為中率甲丙為末率丙乙中率自乘之正方為丁戊乙丙甲丙末率與甲乙首率相乘之長方為甲丙庚辛甲辛與甲乙等此一正方一長方之積等而甲乙首率

自乘之正方為甲乙已辛丙乙中率與甲乙首率相乘之長方為丙乙已庚（丙庚與甲乙等）夫甲丙庚辛之長方既與丁戊乙丙之正方等則甲乙已辛之正方亦必與丁戊已庚之長方等是以丁戊已庚長方形之闊即中率其長比闊之較即首率故以首率自乘為長方積仍以首率為長比闊之較用帶縱平方法開之得闊為中率也

又法以首率十萬為股首率十萬折半得五萬為勾求得弦一十一萬一千八百零三內減勾五萬餘六萬一千八百零三為相連比例之中率以中率與首率相減餘三萬八千一百九十七即為相連比例之末率也如圖甲乙與乙丙皆為首率今以甲乙為股乙丙折半得乙丁為勾求得甲丁弦試依甲丁弦度將乙丁勾引長至戊作丁乙戊線仍自



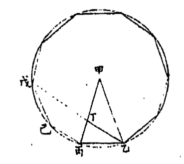
甲至戊作一圜界則甲丁戊丁同為半徑且皆為弦於戊丁弦內減乙丁勾所餘乙戊與已乙等即中率於甲乙首率內減去與乙戊相等之已乙中率所餘甲已即末率也此法與前法理實相同帶縱較數開方法有以半較自乘與原積相加開方得半和於半和內減半較得闊者今此法以首率為股自乘得甲乙丙壬正方形即與庚戊丙辛長方形

積等乙丙即長闊之較乙丁即半較戊丁即半和今以乙丁為勾自乘甲乙為股自乘相加開方得甲丁弦即如乙丁半較自乘與甲乙自乘原積相加開方而得甲丁與戊丁等戊丁内減乙丁餘戊乙即半和内減半較得闊為中率也

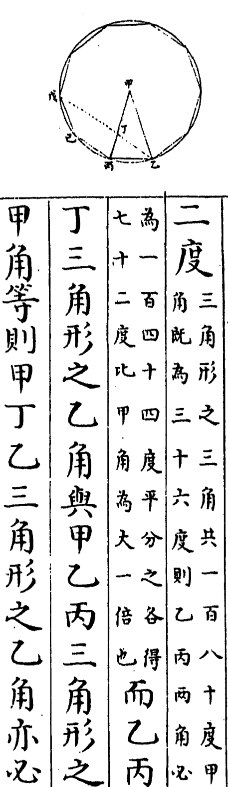
設如圜徑二十萬求内容十邊形之一邊幾何

法用連比例三率有首率求中率末率使中率末率相加與首率等之法以圜

徑二十萬折半得十萬為首率自乘得一百億為長方積以十萬為長闊之較用帶縱較數開方法算之得六萬一千八百零三小餘三九八八七四九為連比例之中率即圜內容十邊形之每一邊也如甲圜內容十邊形每邊之弧得圜周十分之一皆三十六度其通弦即圜內十邊形之一邊試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙



三角形復自圜界乙至圜界戊作一乙戊線則截甲丙線於丁又成乙丙丁三角形而乙戊遂為一百零八度之通弦此乙丙丁三角形與甲乙丙三角形為同式形（乙丙丁三角形之乙角當戊丙弧為乙丙弧之倍則乙丙丁三角形之乙角與甲乙丙三角形之甲角等又同用丙角其餘一角亦必等故為同式形）其相當各邊俱成相連比例故甲乙與乙丙之比同於乙丙與丙丁之比為相連比例三率而甲乙為首率乙丙



為中率丙丁為末率也又甲乙丙三角形其甲角既居全圜十分之一為三十六度則乙角必比甲角大一倍為七十二度（三角形之三角共一百八十度甲角既為三十六度則乙丙兩角必為一百四十四度平分之各得七十二度比甲角為大一倍也）而乙丙丁三角形之乙角與甲乙丙三角形之甲角等則甲丁乙三角形之乙角亦必與甲角等是則甲丁乙三角形必兩邊相等之三角形而乙丙丁三角形亦為

兩邊相等之三角形也夫甲丁既與丁乙等而丁乙又與乙丙中率等則甲丁亦必與中率等矣是以甲丁中率與丁丙末率相加與甲丙首率等故用連比例三率有首率求中率法算之得中率為十邊形之一邊也

又法以圜徑二十萬折半得半徑十萬為股自乘得一百億又以半徑十萬折半得五萬為勾自乘得二十五億相加

得一百二十五億開方得弦一十一萬一千八百零三小餘三九八八七四九於弦數內減去勾數餘六萬一千八百零三小餘三九八八七四九即圜內容十邊形之每一邊也

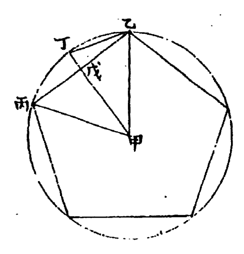
如甲圜內容十邊形每邊之弧得圜周十分之一皆三十六度試自圜心甲至圜界乙作甲乙半徑線為股又自圜心甲取直角作甲丙半徑線折半得甲丁為勾求得乙丁弦內減與甲丁相等之

戊丁餘乙戊即與乙已等為圜内容十邊形之每一邊也乙已弧既為三十六度則乙已邊六萬一千八百零三小餘三九八八七四九為三十六度之通弦折半得乙庚三萬零九百零一小餘六九九四三七四即乙辛弧十八度之正弦也

設如圜徑二十萬求内容五邊形之一邊幾何

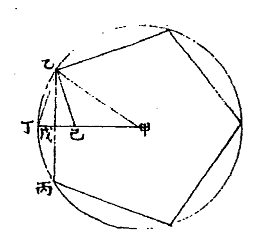
法以半徑十萬為底仍以半徑十萬與圜内容十邊形之一邊六萬一千八百

零三小餘三九八八七四九為兩腰用三角形求中垂線法算之得中垂線五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二倍之得一十一萬七千五百五十七小餘○五○四五八四即圜內容五邊形之每一邊也如甲圜內容五邊形每邊之弧得圜周五分之一皆七十二度試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙三角形其乙丙邊為七十二度之通弦



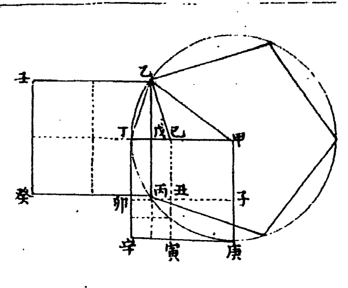
如以乙丙弧七十二度折半於丁作乙丁線即圜內容十邊形之一邊仍自圜心甲至圜界丁作甲丁半徑線又成甲乙丁三角形而甲丁線平分乙丙線於戊此乙戊線為甲乙丁三角形之中垂線即五邊形每邊之一半故以甲丁半徑為底甲乙半徑為大腰乙丁十邊形之一邊為小腰求得乙戊中垂線倍之為五邊形之每一邊也

又法以半徑十萬為股自乘得一百億圜內容十邊形之一邊六萬一千八百零三小餘三九八八七四九為勾自乘得三十八億一千九百六十六萬零一百一十二小餘四八九九九〇五八五八五〇〇一相加得一百三十八億一千九百六十六萬零一百一十二小餘四八九九九〇五八五八五〇〇一開方得弦一十一萬七千五百五十七小餘〇五〇四五八四即圜內容五邊形之每一邊也此法蓋因

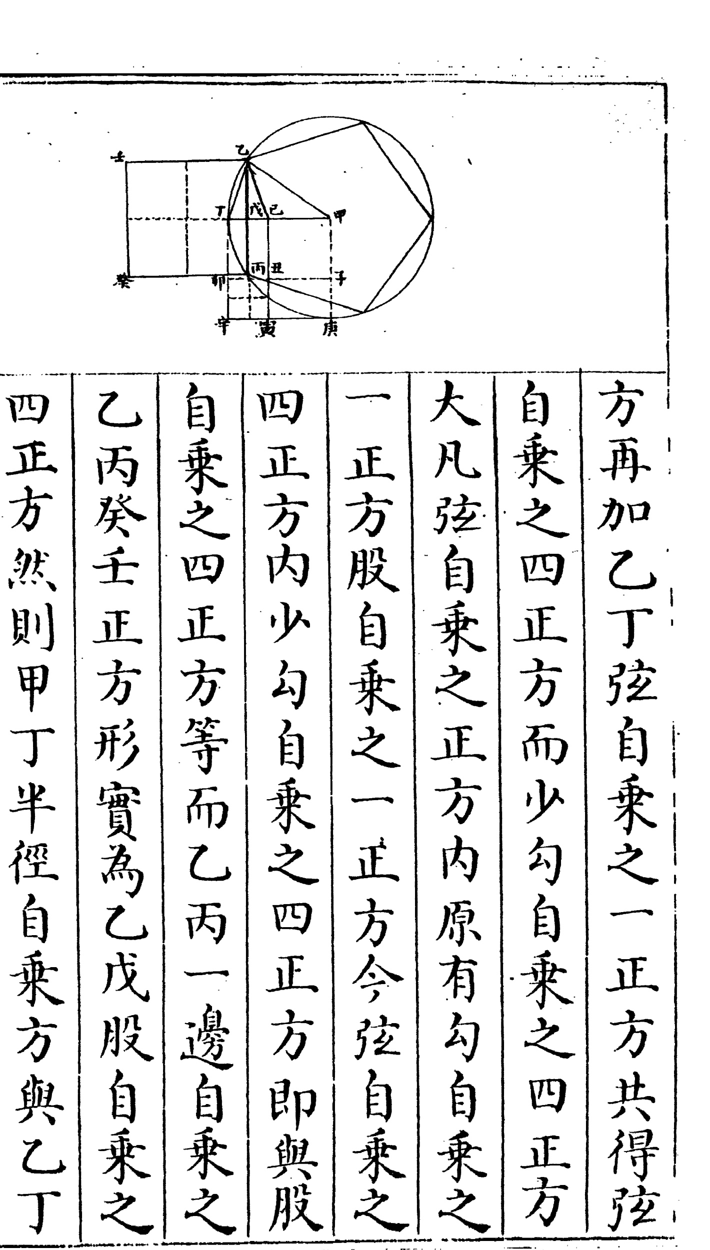


半徑自乘十邊形之一邊自乘兩自乘方積相併即與五邊形之一邊自乘之方積等故用勾股求弦之法算之如甲圜內容五邊形將乙丙弧折半於丁作乙丁線即圜內容十邊形之一邊仍自圜心甲至丁作甲丁半徑線遂成甲乙丁三角形又依乙丁線度截甲丁半徑於己作乙己線成乙己丁三角形與甲乙丁三角形為同式形故甲乙為首率

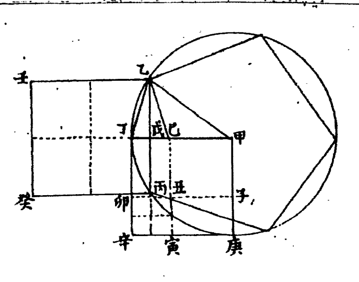
乙丁為中率巳丁為末率甲巳亦與乙丁等為中率而乙丙邊平分巳丁末率於戊又成乙戊丁勾股形乙戊五邊形每邊之半為股丁戊末率之半為勾乙丁中率為弦試依甲丁半徑度作甲庚辛丁正方形又依乙丙五邊之一邊度作乙丙癸壬正方形其甲庚辛丁正方形內甲子丑巳為乙丁弦自乘之一正方甲巳既與乙丁弦等故甲子丑巳為弦自乘之正方巳寅辛



丁長方形亦與乙丁弦自乘之一正方等（丁辛原與甲丁首率等己丁末率與丁辛首率相乘自與乙丁中率自乘之正方等）而子庚寅丑長方形為乙丁弦自乘之一正方內少勾自乘之四正方（蓋子庚辛卯長方形為首率與末率相乘之長方與乙丁中率自乘之正方等內卻少丑寅辛卯正方形而丑寅辛卯正方形實為戊丁勾自乘之四正方故子庚寅丑長方形為乙丁弦自乘之一正方少勾自乘之四正方也）是則甲丁半徑自乘之甲庚辛丁正方形內有弦自乘之三正方而少勾自乘之四正



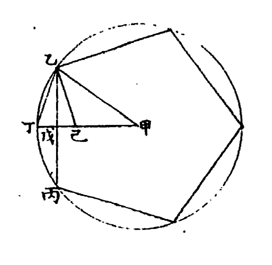
方再加乙丁弦自乘之一正方共得弦自乘之四正方而少勾自乘之四正方大凡弦自乘之正方內原有勾自乘之一正方股自乘之一正方今弦自乘之四正方內少勾自乘之四正方即與股自乘之四正方等而乙丙一邊自乘之乙丙癸壬正方形實為乙戊股自乘之四正方然則甲丁半徑自乘方與乙丁十邊形之一邊自乘方相併既與乙戊



股自乘之四正方等而乙丙一邊自乘之正方豈不與甲丁半徑自乘乙丁十邊形之一邊自乘之两正方等乎故以甲丁半徑為股乙丁十邊形之一邊為勾求得弦而為五邊形之一邊也

又法以半徑十萬自乘得一百億為長方積仍以半徑十萬為長闊之較用帶縱較數開方法算之得長一十六萬一千八百零三小餘三九八八七四九折半得八萬

零九百零一小餘六九九四三七四為自圜心至五邊形每邊之垂線乃以半徑十萬為弦圜心至五邊形每邊之垂線為股求得勾五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二倍之得一十一萬七千五百五十七小餘〇五〇四四五八四即圜内容五邊形之每一邊也如甲圜内容五邊形將乙丙弧折半於丁作乙丁線即圜内容十邊形之一邊仍自圜心甲至丁作甲丁半徑線



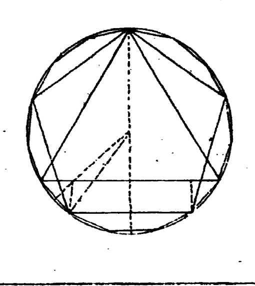
成甲乙丁三角形又依乙丁線度截甲丁半徑於己作乙己線成乙己丁三角形與甲乙丁三角形為同式形故甲乙為首率乙丁為中率己丁為末率甲己亦與乙丁等為中率而乙丙邊平分己丁末率於戊是以己戊與戊丁俱為半末率而甲戊自圜心至邊之垂線則為一中率半末率之共數今以半徑首率自乘為長方積開帶縱平方得長乃首

率與中率之和其内有兩中率一末率折半得一中率半末率即甲戊自圜心至邊之垂線既得甲戊垂線乃以甲乙半徑為弦甲戊垂線為股求得乙戊勾倍之得乙丙即圜内容五邊形之一邊也或以乙丁中率為弦戊丁半末率為勾求得乙戊股倍之亦即圜内容五邊形之一邊也乙丙弧既為七十二度則乙丙邊一十一萬七千五百五十七小餘

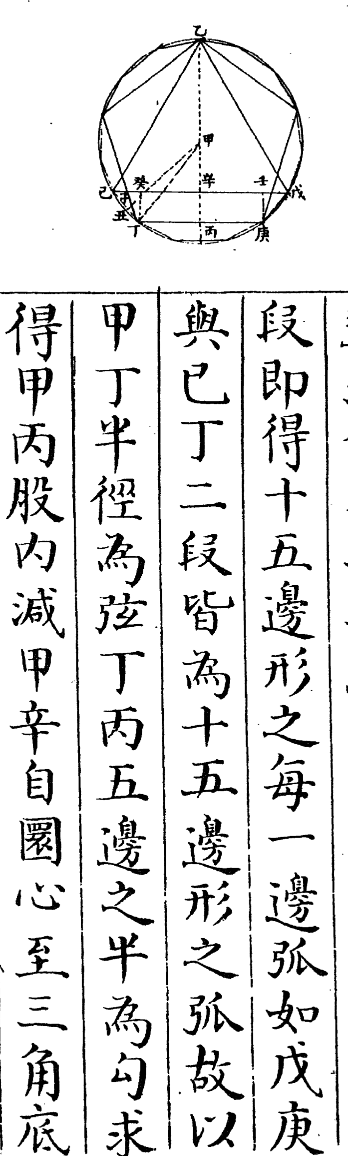
〇五〇四五八四為七十二度之通弦折半得乙戊五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二即乙丁弧三十六度之正弦也

設如圜徑二十萬求內容十五邊形之一邊幾何

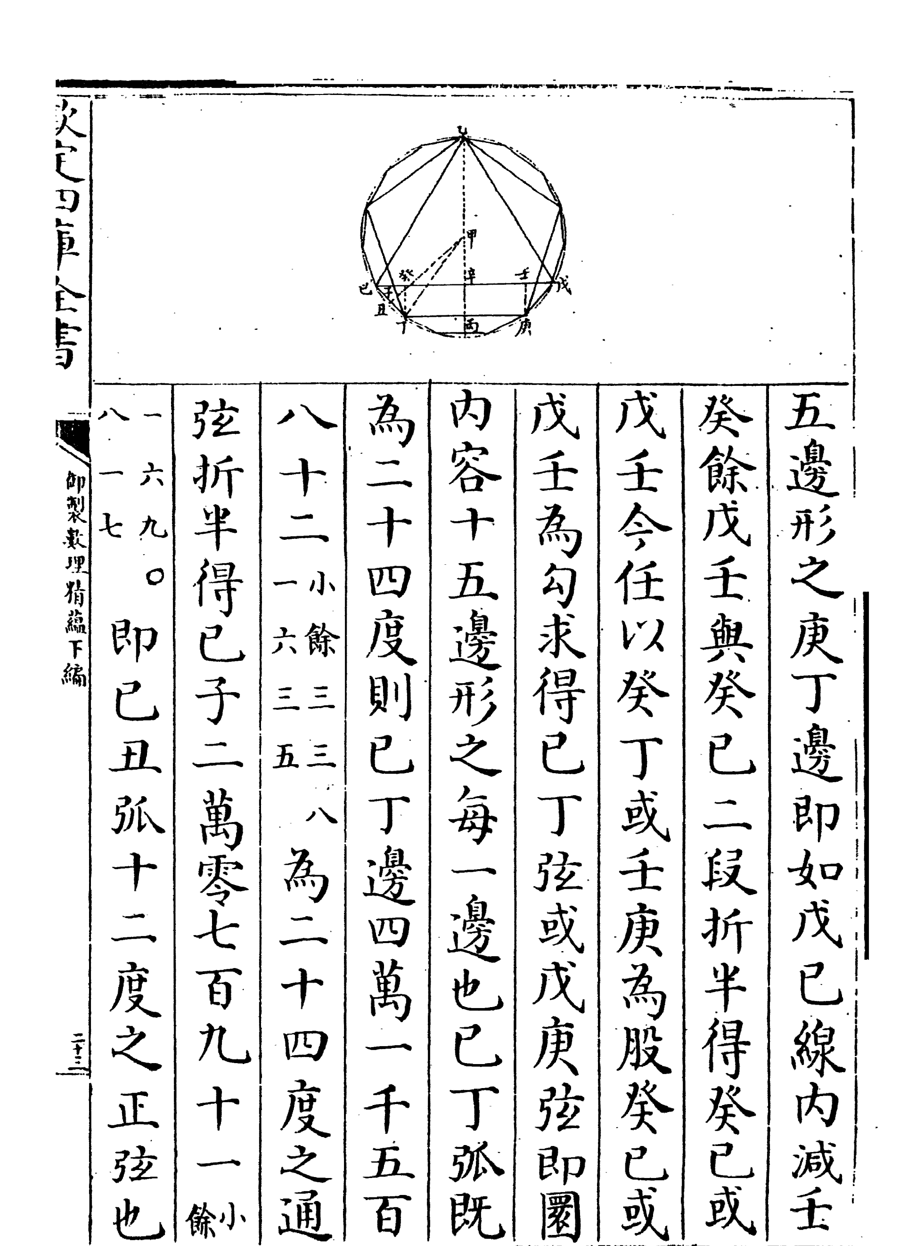
法以半徑十萬為弦圜內容五邊形之半五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二為勾求得股八萬零九百零一小餘六九九四三七五內減半徑之半五萬餘三萬零九百零一小餘六九九四三七五為股次以圜內容



三邊形之一邊一十七萬三千二百零五小餘〇八〇七五六八內減圜內容五邊形之一邊一十一萬七千五百五十七小餘〇五〇四五八四餘五萬五千六百四十八小餘〇三〇二九八四折半得二萬七千八百二十四小餘〇一五一四九二為勾求得弦四萬一千五百八十二小餘三三八一六三五即圜內容十五邊形之每一邊也如甲圜內容十五邊形每邊之弧得圜周十五分之一皆二



十四度試從圜界乙作圜内容三邊形又作圜内容五邊形將三邊形之每一邊弧分五段五邊形之每一邊弧分三段即得十五邊形之每一邊弧如戊庚與已丁二段皆為十五邊形之弧故以甲丁半徑為弦丁丙五邊之半為勾求得甲丙股内減甲辛自圜心至三角底邊之垂線為半徑之半餘辛丙與癸丁或壬庚等復於三邊形之戊已邊内減



五邊形之庚丁邊即如戊已線內減壬癸餘戊壬與癸已二段折半得癸已或戊壬今任以癸丁或壬庚為股癸已或戊壬為勾求得已丁弦或戊庚弦即圜內容十五邊形之每一邊也已丁弧既為二十四度則已丁邊四萬一千五百八十二小餘三三八一六三五為二十四度之通弦折半得已子二萬零七百九十一小餘一六九〇八一七即已丑弧十二度之正弦也

新增按分作相連比例四率法

設如以十萬為一率作相連比例四率使一率與四率相加與二率三倍等問二率三率四率各幾何

法以一率十萬自乘再乘得一千兆（成一立方積）為實又以一率十萬自乘三因之得三百億（成三平面積）為法以除原實一千兆得三萬乃以三萬自乘再乘得二十七兆益於原實一千兆內得一千零二十七兆為共實按除法以所得三萬與

三
三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

三四
三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇二七〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇一二七〇〇〇〇〇〇〇〇〇

三四七

三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

一〇三九三〇四〇〇〇〇〇〇〇〇〇
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇一三九三〇四〇〇〇〇〇〇
一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇一九三〇四〇〇〇〇〇〇〇

法三百億相因得九百兆與共實相減餘一百二十七兆為第二位實以法之三百億除之得四千乃以首位所得三萬合次位所得四千共三萬四千自乘再乘得三十九兆三千零四十億仍益於原實一千兆內得一千零三十九兆三千零四十億為共實按除法減首位所得三萬與法三百億相因之九百兆又減次位所得四千與法三百億相因

三四七

三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

一〇三九三〇四〇〇〇〇〇〇〇〇〇

九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇一三九三〇四〇〇〇〇〇〇

一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇一九三〇四〇〇〇〇〇〇〇

之一百二十兆餘一十九兆三千零四十億為第三位實以法之三百億除之得六百所餘太多因益積故取畧大之數為七百合前兩位所得三萬四千共三萬四千七百自乘再乘得四十一兆七千八百一十九億二千三百萬仍益於原實一千兆內得一千零四十一兆七千八百一十九億二千三百萬為共實按除法減首位所得三萬與法三百

三四七二

三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇四一七一八一九二三〇〇〇〇〇〇
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇一四一七一八一九二三〇〇〇
一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇二一七一八一九二三〇〇〇〇
二一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇七一八一九二三〇〇〇〇〇

億相因之九百兆又減次位所得四千與法三百億相因之一百二十兆又減三位所得七百與法三百億相因之二十一兆餘七千八百一十九億二千三百萬為第四位實以法之三百億除之得二十合前三位所得三萬四千七百共三萬四千七百二十自乘再乘得四十一兆八千五百四十二億一千零四萬八千仍益於原實一千兆內得一千

三四七二九

三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇四一八五四二一〇〇四八〇〇
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇一四一八五四二一〇〇四八
一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇二一八五四二一〇〇四八〇
二一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇八五四二一〇〇四八〇〇
六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二五四二一〇〇四八〇〇

零四十一兆八千五百四十二億一千零四萬八千為共實按除法減首位所得三萬與法三百億相因之九百兆又減次位所得四千與法三百億相因之一百二十兆又減三位所得七百與法三百億相因之二十一兆又減四位所得二十與法三百億相因之六千億餘二千五百四十二億一千零四萬八千為末位實以法之三百億除之得八所

三四七二九

三○○○○○○○○○○

一○四一八八六七六六四○二四八九

九○○○○○○○○○○

○一四一八八六七六六四○三

一二○○○○○○○○○○

○三一八八六七六六四○二四

三一○○○○○○○○○○

○○八八六七六六四○二四八

六○○○○○○○○○○

三八六七六六四○二四八九

三七○○○○○○○○○○

○一六七六六四○二四八九

餘亦太多因益積仍取畧大之數為九合前四位所得三萬四千七百二十共三萬四千七百二十九自乘再乘得四十一兆八千八百六十七億六千六百四十萬零二千四百八十九仍益於原實一千兆內得一千零四十一兆八千八百六十七億六千六百四十萬二千四百八十九為共實按除法以五次所得之數與法相因之數遞減之仍餘一

三四七二九

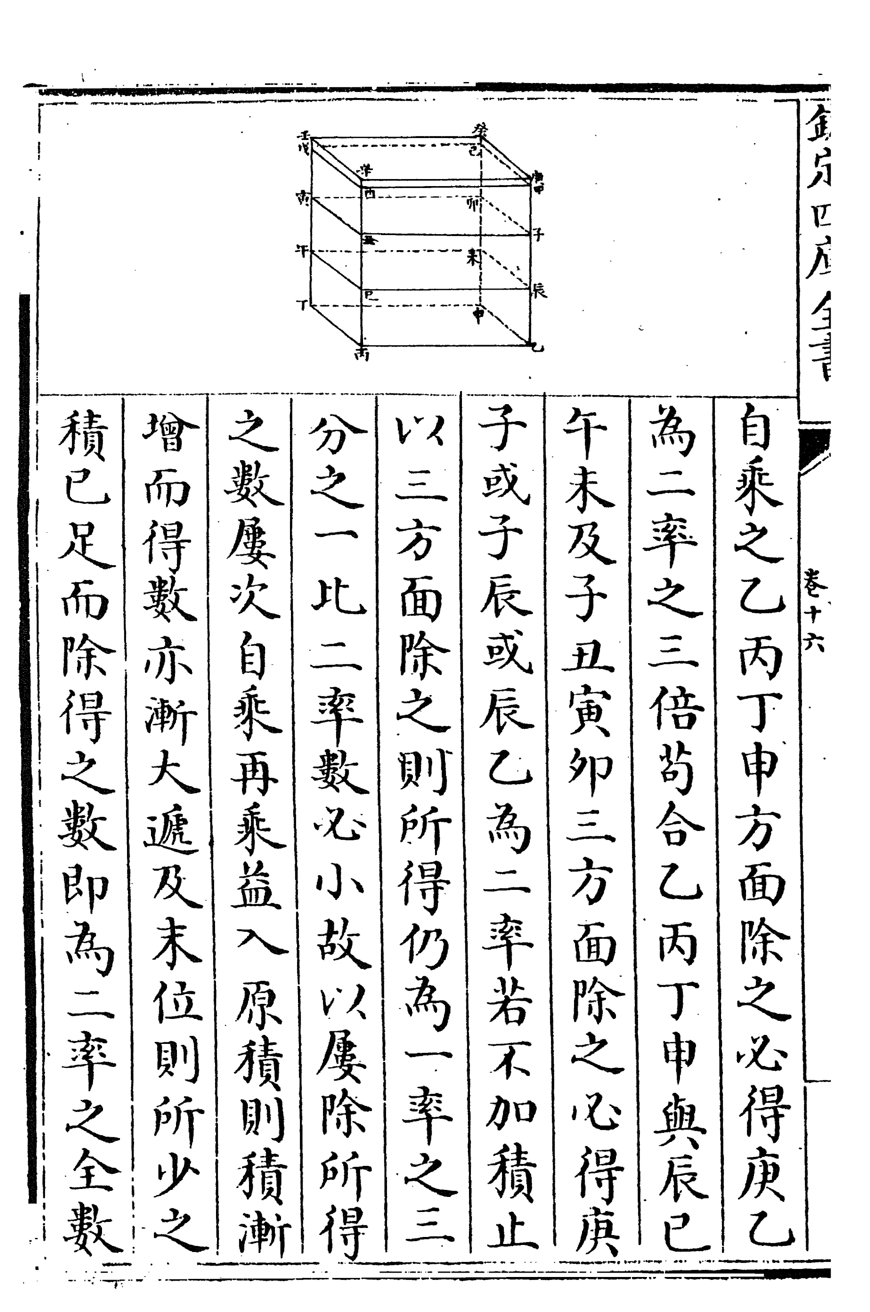
百六十七億六千六百四十萬二千四百八十九不盡是共除得三萬四千七百二十九為相連比例之二率也以二率之三萬四千七百二十九自乘得一十二億零六百一十萬三千四百四十一以一率之十萬除之得一萬二千零六十一為三率以二率之三萬四千七百二十九三倍之得十萬四千一百八十七內減去一率之十萬餘四千一百

一率	一〇〇〇〇〇
二率	三四七二九
三率	一二〇六一
四率	四一八七

八十七為四率如以三率之一萬二千零六十一自乘以二率之三萬四千七百二十九除之亦得四千一百八十七為四率也此為益實歸除之法蓋因此法止有一率之數作相連比例四率使一率與四率之共數與二率三倍等而連比例四率之理一率自乘用四率再乘與二率自乘再乘之數等今立法以一率自乘再乘為原實較之三倍二率

與一率自乘之面積相乘之數却少一二率自乘再乘之數故以累除所得之數屢次自乘再乘益入原實然後按法除之始足二率三倍之數也如圖甲乙為一率庚子子辰辰乙皆為二率庚甲為四率庚乙為一率四率之共數又為二率之三倍甲乙丙丁戊己為一率自乘再乘之正方體庚乙丙丁壬癸為三倍二率與一率自乘面積相乘之長方

體一率自乘三因之得三平面如以二率乘之成三扁方體合之即成三倍二率乘一率自乘面積之一長方體比一率自乘再乘之正方體多一庚甲酉戊壬癸扁方體此扁方體即一率自乘用四率再乘之數與二率自乘再乘之積等若於一率自乘再乘之正方體內加入二率自乘再乘之正方體即如於甲乙丙丁戊己正方體上加一庚甲酉戊壬癸之扁方體成庚乙丙丁壬癸之長方體而以一率

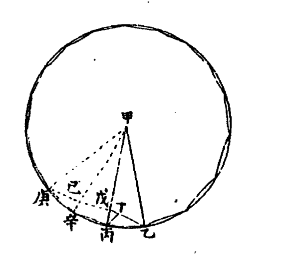


自乘之乙丙丁申方面除之必得庚乙為二率之三倍苟合乙丙丁申與辰巳午未及子丑寅夘三方面除之必得庚子或子辰或辰乙為二率若不加積止以三方面除之則所得仍為一率之三分之一比二率數必小故以屢除所得之數屢次自乘再乘益入原積則積漸增而得數亦漸大遞及末位則所少之積已足而除得之數即為二率之全數

馬

設如圜徑二十萬求内容十八邊形之一邊幾何

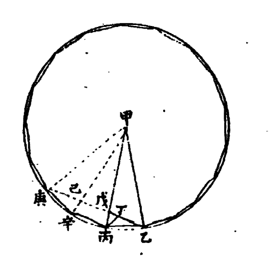
法用連比例四率有一率求二率使一率與四率相加與二率三倍等之法以圜徑二十萬折半得十萬為一率自乘再乘得一千兆為實又以半徑十萬自乘三因之得三百億為法按益實歸除之法除實得三萬四千七百二十九小餘六三五五三三三四為二率即圜内十八邊形之



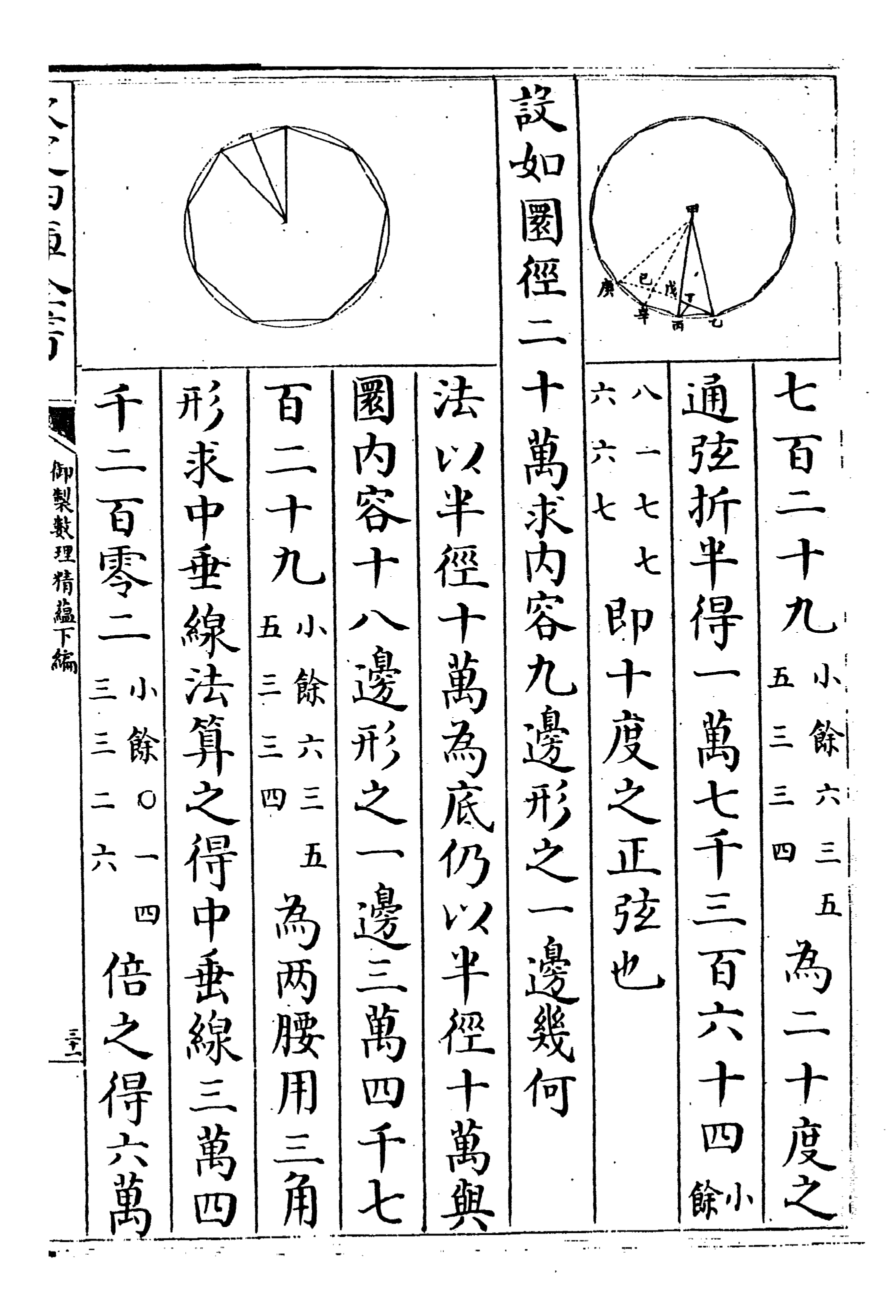
每一邊也如甲圜内容十八邊形每邊之弧得圜周十八分之一皆二十度其通弦即圜内十八邊形之一邊試自圜心至圜界乙丙作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙三角形復自圜界乙至圜界庚作一乙庚線則截甲丙線於戊又成乙丙戊三角形而乙庚為六十度之通弦復自圜界丙按丙戊線度至乙庚線之丁作一丙丁線則又成丙丁戊三



角形此三三角形皆為同式形乙丙戊三角形之乙角當庚丙弧為乙丙弧之倍則乙丙戊三角形之乙角與甲乙丙三角形之甲角等又與甲乙丙三角形同用丙角丙丁戊三角形之丁丙線與甲辛半徑平行則丙丁戊三角形之丙角與甲丙辛三角形之甲角為相對錯角亦必等又與乙丙戊三角形同用戊角是此三三角形之各角互相等而為同式形也其相當各邊俱成相連比例故甲乙與乙丙之比同於乙丙與丙戊之比乙丙與丙戊之比又同於丙戊與戊丁之比為相連比例四率而甲乙為一率乙



丙為二率丙戊為三率戊丁為四率也又乙庚為六十度之通弦與甲乙一率等而乙戊丁己己庚三段皆與乙丙二率等是乙庚一率中有乙丙二率之三倍而少一丁戊四率也必以乙庚一率與丁戊四率相加方與乙丙二率之三倍等故用連比例四率有一率求二率法算之得二率為十八邊形之一邊也乙丙弧既為二十度乙丙邊三萬四千

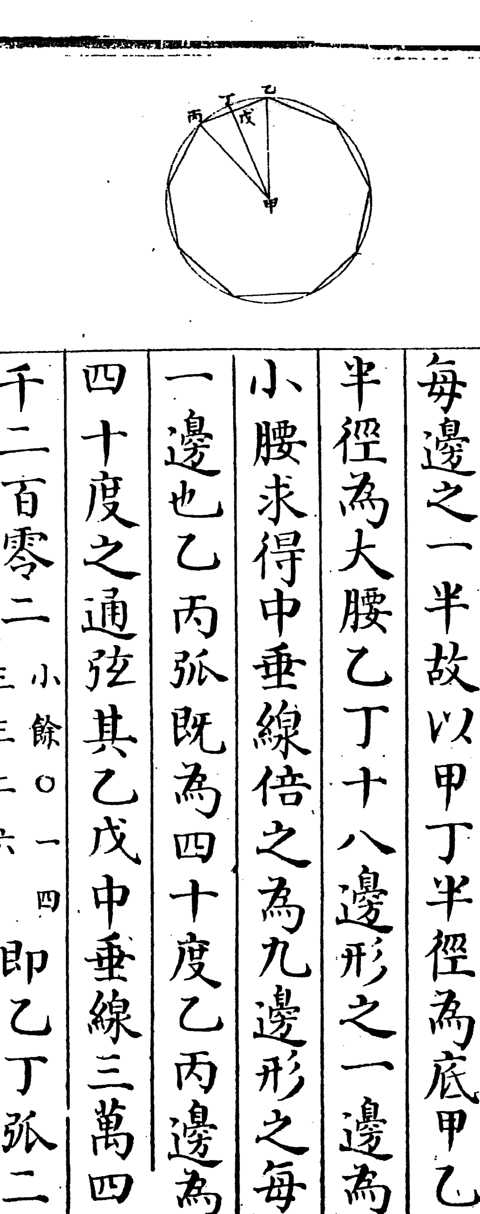


七百二十九小餘六三五五三三四為二十度之通弦折半得一萬七千三百六十四小餘八一七七六六七即十度之正弦也

設如圈徑二十萬求内容九邊形之一邊幾何

法以半徑十萬為底仍以半徑十萬與圈内容十八邊形之一邊三萬四千七百二十九小餘六三五五三三四為兩腰用三角形求中垂線法算之得中垂線三萬四千二百零二小餘○一四三三二六倍之得六萬

八千四百零四小餘〇二八六六五二即圜內容九邊形之每一邊也如甲圜容九邊形每邊之弧得圜周九分之一皆四十度試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙三角形其乙丙邊為四十度之通弦如以乙丙弧四十度折半於丁作乙丁線即圜內容十八邊形之一邊仍自圜心甲至圜界丁作甲丁半徑線又成甲乙丁三角形



而甲丁線平分乙丙線於戊此乙戊線為甲乙丁三角形之中垂線即九邊形每邊之一半故以甲丁半徑為底甲乙半徑為大腰乙丁十八邊形之一邊為小腰求得中垂線倍之為九邊形之每一邊也乙丙弧既為四十度乙丙邊為四十度之通弦其乙戊中垂線三萬四千二百零二小餘〇一四三三二六即乙丁弧二十度之正弦也

按分作相連比例四率又法

設如以十萬為一率作相連比例四率使一率與四率相加與二率兩倍再加一三率之數等問二率三率四率各幾何

四
二○○○○○○○○○○○
一○○○○○○○○○○○○○○○○○○

法以一率十萬自乘再乘得一千兆一成立方體為實又以一率十萬自乘二因之得二百億成二平方面積為法以除原實一千兆得五萬為盡數因減實大於益實故取畧小之數為四萬乃以四萬自乘再

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
六四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇六四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇九〇四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

四四
二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
九〇四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一〇四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

乘得六十四兆益於原實一千兆內得一千零六十四兆為益實復以所得四萬自乘得一十六億以一率十萬再乘得一百六十兆於益實內減之餘九百零四兆為正實按除法以所得四萬與法二百億相因得八百兆與正實相減餘一百零四兆為第二位實以法之二百億除之得五千仍取畧小之數為四千乃以首位所得四萬合次位所得四

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八五一八四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

一〇八五一八四〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一九三六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇八九一五八四〇〇〇〇〇〇〇〇〇

千共四萬四千自乘再乘得八十五兆一千八百四十億益於原實一千兆內得一千零八十五兆一千八百四十億為益實復以所得四萬四千自乘得一十九億三千六百萬以一率十萬再乘得一百九十三兆六千億於益實內減之餘八百九十一兆五千八百四十億為正實按除法減首位所得四萬與法二百億相因之八百兆又減次位所得

四四五
二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八九一五八四〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇九一五八四〇〇〇〇〇〇
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一一五八四〇〇〇〇〇〇

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八八一二一一二五〇〇〇〇〇〇
一〇八八一二一一二五〇〇〇〇〇〇
一九八〇二五〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇八九〇〇九六一二五〇〇〇〇〇〇

四千與法二百億相因之八十兆餘一十一兆五千八百四十億為第三位實以法之二百億除之得五百合前兩位所得四萬四千共四萬四千五百自乘再乘得八十八兆一千二百一十一億二千五百萬益於原實一千兆內得一千零八十八兆一千二百一十一億二千五百萬為益實復以所得四萬四千五百自乘得一十九億八千零二十五

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八八一二一一二五〇〇〇〇〇〇

一〇八八一二一一二五〇〇〇〇〇〇
一九八〇二五〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇八九〇〇九六一二五〇〇〇〇〇〇

萬以一率十萬再乘得一百九十八兆零二百五十億於益實內減之餘八百九十兆零九百六十一億二千五百萬為正實按除法減首位所得四萬與法二百億相因之八百兆又減次位所得四千與法二百億相因之八十兆又減三位所得五百與法二百億相因之一十兆餘九百六十一億二千五百萬為第四位實以法之二百億除之實不足

四四五〇四
二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

八九〇〇九六一二五〇〇〇〇〇〇
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇九〇〇九六一二五〇〇〇
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

一〇〇九六一二五〇〇〇〇
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

〇〇〇九六一二五〇〇〇〇〇〇

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八八一四四八九〇一三六〇六四

一〇八八一四四八九〇一三六〇六四
一九八〇六〇六〇一六〇〇〇〇〇

〇八九〇〇八四六八八五三六〇六四

法乃以第四位為空位而第五位得四故以四為末位合前四位所得四萬四千五百空十共四萬四千五百零四自乘再乘得八十八兆一千四百四十八億九千零一十三萬六千零六十四益於原實一千兆內得一千零八十八兆一千四百四十八億九千零一十三萬六千零六十四為益實復以所得四萬四千五百零四自乘得一十九億八千

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八八一四四八九〇一三六〇六四
一〇八八一四四八九〇一三六〇六四
一九八〇六〇六〇一六〇〇〇〇〇
〇八九〇〇八四二八八五三六〇六四

四四五〇四
二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八九〇〇八四二八八五三六〇六四
八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇九〇〇八四二八八五三六
[illegible]
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
[illegible]
〇四二八八五三六〇六四

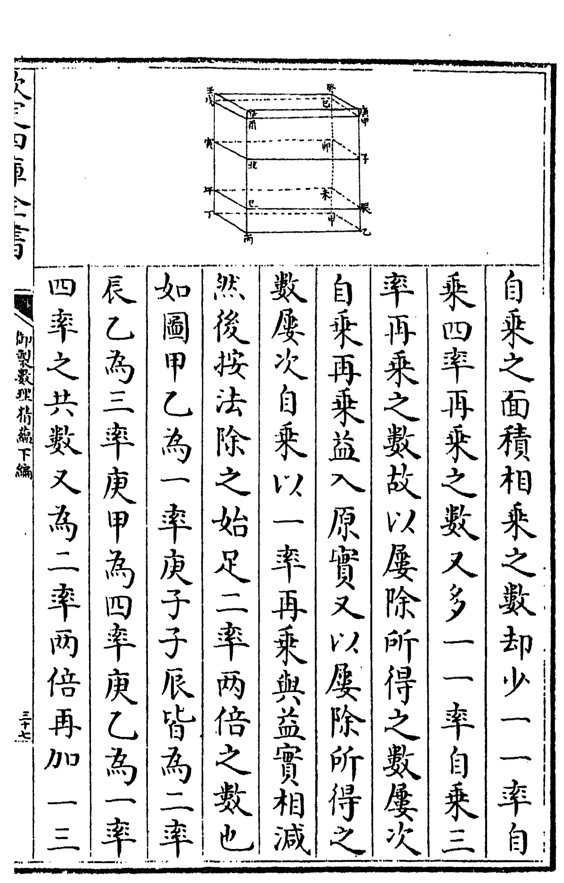
零六十萬六千零一十六以十萬再乘得一百九十八兆零六百零六億零一百六十萬於益實內減之餘八百九十兆零八百四十二億八千八百五十三萬六千零六十四為正實按除法以五次所得之數於法相因之數遞減之仍餘四十二億八千八百五十三萬六千零六十四不盡是共除得四萬四千五百零四為相連比例之二率也以二率

一率	一〇〇〇〇〇
二率	四四五〇四
三率	一九八〇六
四率	八八一四

之四萬四千五百零四自乘得一十九億八千零六十萬六千零一十六以一率之十萬除之得一萬九千八百零六為三率以二率之四萬四千五百零四二因之與三率之一萬九千八百零六相加得十萬八千八百一十四減去一率之十萬餘八千八百一十四為四率如以三率之一萬九千八百零六自乘以二率之四萬四千五百零四除之亦

一率　一〇〇〇〇〇
二率　四四五〇四
三率　一九八〇六
四率　八八一四

得八千八百一十四為四率也此為益實兼減實歸除之法葢因此法止有一率之數作相連比例四率使一率與四率之共數與二率兩倍再加一三率之數等而相連比例四率之理一率自乘用四率再乘與二率自乘再乘之數等又一率自乘用三率再乘與二率自乘用一率再乘之數等今立法以一率自乘再乘為原實較之二率加倍與一率



自乘之面積相乘之數却少一一率自乘四率再乘之數又多一一率自乘三率再乘之數故以屢除所得之數屢次自乘再乘益入原實又以屢除所得之數屢次自乘以一率再乘與益實相減然後按法除之始足二率兩倍之數也如圖甲乙為一率庚子子辰皆為二率辰乙為三率庚甲為四率庚乙為一率四率之共數又為二率兩倍再加一三

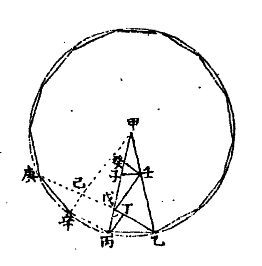
率之共數甲乙丙丁戊己為一率自乘再乘之正方體庚乙丙丁壬癸為兩倍二率併一三率與一率自乘面積相乘之長方體比一率自乘再乘之正方體多一庚甲酉戊壬癸扁方體比扁方體即一率自乘四率再乘之扁方體與二率自乘再乘之積等比兩倍二率與一率自乘面積相乘之扁方體多一長乙丙丁午未扁方體比扁方體即一率自

乘三率再乘之扁方體與二率自乘一率再乘之積等若於一率自乘再乘之正方體内加入二率自乘再乘之數再減去二率自乘一率再乘之數即如於甲乙丙丁戊己正方體内加入庚甲酉戊壬癸之扁方體減去辰乙丙丁午未之扁方體成一庚辰巳午壬癸之扁方體而以一率自乘之辰巳午未方面除之必得庚辰為二率之兩倍茍合辰巳

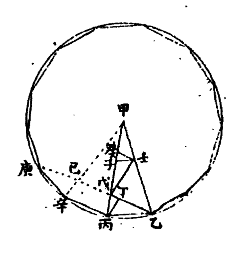
午未子丑寅卯二方面除之必得庚子或子辰為二率若不益少減多而以二方面除之則所得仍為一率之二分之一比二率數必大故以屢除所得之數屢次自乘再乘益入原積復以屢除所得之數自乘用一率再乘逐層與原積相減遞及末位則所少之積漸足所多之積漸消而除得之數即為二率之全數焉

設如圜徑二十萬求內容十四邊形之一邊幾何

法用連比例四率有一率求第二率使一率與四率相加與二率兩倍再加一三率等之法以圜徑二十萬折半得十萬為一率自乘再乘得一千兆為實又以半徑十萬自乘倍之得二百億為法按益實兼減實歸除之法除實得四萬四千五百零四小餘一八六七九一三為二率即圜內十四邊形之每一邊也如甲圜內

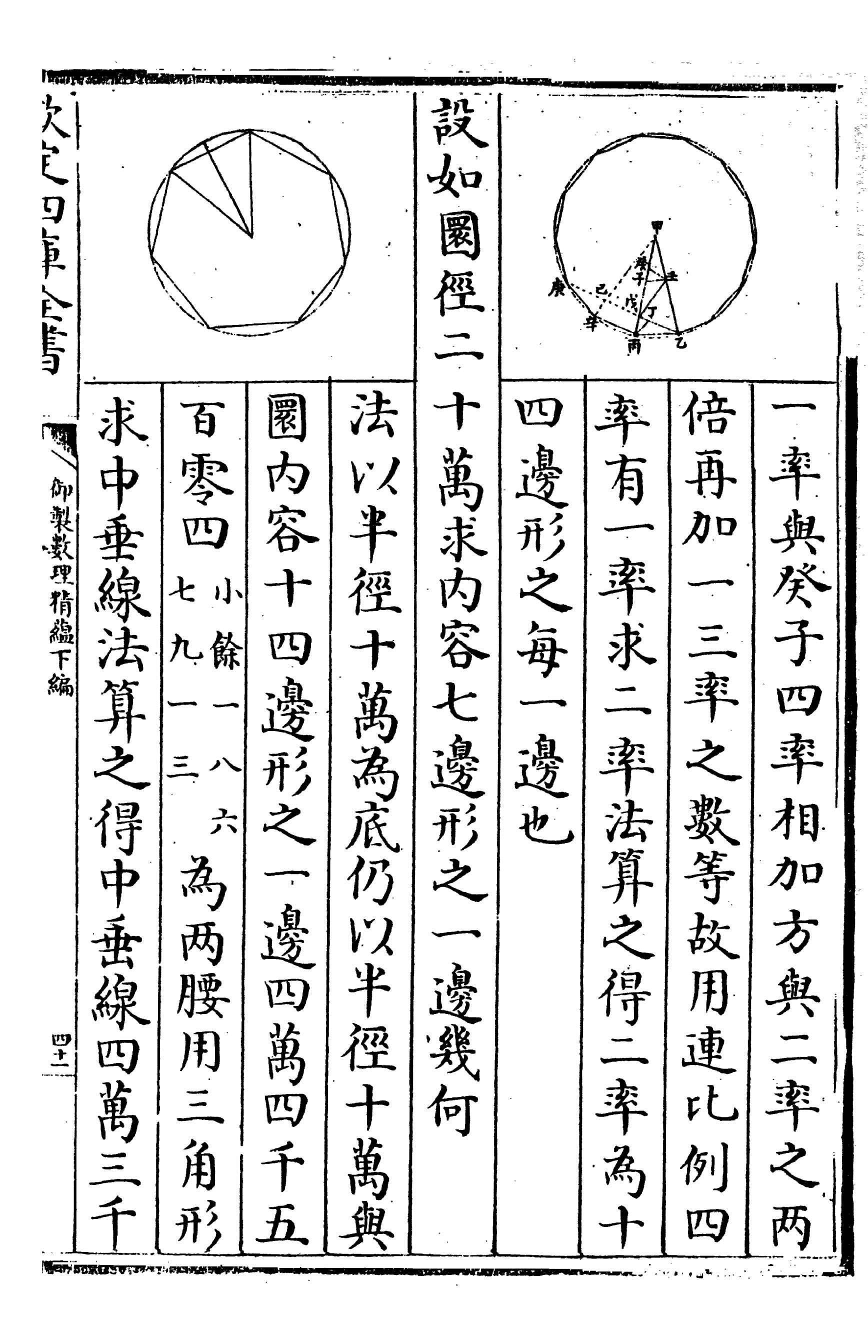


容十四邊形每邊之弧得圜周十四分之一皆二十五度四十二分五十一秒有餘其通弦即圜內十四邊形之一邊試自圜心至圜界乙丙作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙三角形復自圜界乙至圜界庚作一乙庚線則截甲丙線於戊又成乙丙戊三角形復自圜界丙按丙戊線度至乙庚線之丁作一丙丁線則又成丙丁戊三角形此三三角形



皆為同式形乙戊丙三角形之乙角當丙庚弧為乙丙弧之倍則乙戊丙三角形之乙角與乙甲丙三角形之甲角等又與乙甲丙三角形同用丙角而丙丁戊三角形之丁丙線與甲辛半徑平行即丙丁戊三角形之丙角與甲丙辛三角形之甲角為相對錯角亦必等又與乙丙戊三角形同用戊角是此三三角形之各角互相等而為同式形也其相當各邊俱成相連比例故甲乙與乙丙之比同於乙丙與丙戊之比乙丙與丙戊之比又同於丙戊與戊丁之比為相連比例四率而甲乙為一率乙丙為二率丙戊為

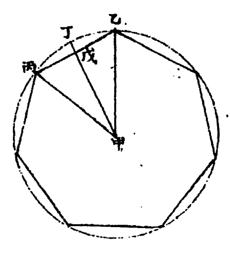
三率戊丁為四率也又按乙戊度作壬戊線與丁丙平行則截甲乙線於壬乃自壬與乙丙平行作壬子線復自壬與乙戊平行作壬癸線則又成甲壬子與壬戊癸丙三角形與乙丙戊三角形等成壬癸子一三角形與丙丁戊三角形等其甲子癸戊皆與乙丙二率等而癸子與丁戊四率等是甲丙一率內有兩二率一三率而少一四率也若以甲丙



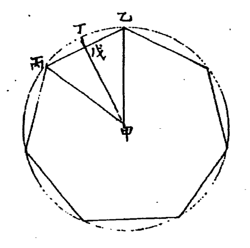
一率與癸子四率相加方與二率之兩倍再加一三率之數等故用連比例四率有一率求二率法算之得二率為十四邊形之每一邊也

設如圜徑二十萬求內容七邊形之一邊幾何

法以半徑十萬為底仍以半徑十萬與圜內容十四邊形之一邊四萬四千五百零四小餘一八六七九一三為兩腰用三角形求中垂線法算之得中垂線四萬三千



三百八十八小餘三七三九一一八倍之得八萬六千七百七十六小餘七四七八二三六即圜内容七邊形之每一邊也如甲圜容七邊形每邊之弧得圜周七分之一皆五十一度二十五分四十二秒有餘試自圜心甲至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二半徑線遂成甲乙丙三角形其乙丙邊為五十一度二十五分四十二秒有餘之通弦如以乙丙弧五十一度二十五



分四十二秒有餘折半於丁作乙丁線即圜內容十四邊形之一邊仍自圜心甲至圜界丁作甲丁半徑線又成甲乙丁三角形而甲丁線平分乙丙線於戊此乙戊線為甲乙丁三角形之中垂線即七邊形每邊之一半故以甲丁半徑為底甲乙半徑為大腰乙丁十四邊形之一邊為小腰求得乙戊中垂線倍之為七邊形之每一邊也

三要

有本弧之正弦求本弧之餘弦有本弧之正弦餘弦求倍弧之正弦餘弦有本弧之正弦餘弦求半弧之正弦餘弦

設如本弧三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二求餘弧五十四度之正弦幾何

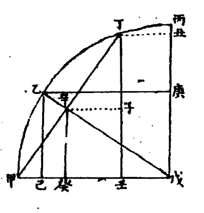
法以三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二為勾半徑十萬為弦求得股八萬零九百零一小餘六九九四三七五為五十四度之正弦即三十六度之餘弦也如甲乙丙九十度之一象限其

甲乙正弧三十六度乙丙餘弧五十四度乙丁為三十六度之正弦試自乙至象限中心戊作乙戊半徑線遂成乙丁戊勾股形乙戊為弦乙丁為勾求得丁戊股與乙己等為乙丙餘弧五十四度之正弦即甲乙正弧三十六度之餘弦也

設如本弧三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二餘弦八萬零九百零一小餘六九九四三七五

求倍弧七十二度之正弦餘弦各幾何

法以半徑十萬為一率本弧之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二為二率本弧之餘弦八萬零九百零一小餘六九九四三七五為三率求得四率四萬七千五百五十二小餘八二五八一四七倍之得九萬五千一百零五小餘六五一六二九四即倍弧七十二度之正弦也求餘弦則以三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二



二九二自乘以半徑十萬除之得三萬四千五百四十九小餘一五〇二八一二倍之得六萬九千零九十八小餘三〇〇五六二四與半徑十萬相減餘三萬零九百零一小餘六九九四三七六即倍弧七十二度之餘弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧三十六度倍之為甲丁弧七十二度乙己為三十六度之正弦庚乙為三十六度之餘弦與戊辛等蓋辛甲與乙己等則戊辛必與戊己等戊己即

庚乙也丁壬為七十二度之正弦試與乙己平行作辛癸線遂成戊己戊辛癸同式兩勾股形其戊乙己勾股形之戊乙弦與乙己勾之比同於戊辛癸勾股形之戊辛弦與辛癸勾之比為相當比例四率而辛癸與子壬等為丁壬之半蓋辛甲為丁甲之半則辛癸亦為丁壬之半故倍之得丁壬為甲丁七十二度之正弦也又如求餘弦其甲辛戊甲癸辛為同式兩勾股形

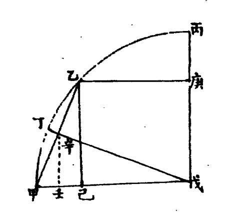
其甲辛戊勾股形之甲戊弦與甲辛勾之比同於甲癸辛勾股形之甲辛弦與甲癸勾之比為相連比例三率既得甲癸倍之得甲壬葢甲丁為甲辛之倍則甲壬亦為甲癸之倍與甲戊半徑相減餘壬戊與丁丑等即甲丁七十二度之餘弦也

設如本弧四十五度之正弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六餘弦亦七萬零七百一十小餘六七八一一八六求半弧二十二度三十分之正弦幾何

法以本弧之正弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六為股本弧之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六與半徑十萬相減餘二萬九千二百八十九小餘三二一八八一四為勾求得弦七萬六千五百三十六小餘六八六四七三〇折半得三萬八千二百六十八小餘三四三二三六五即半弧二十二度三十分之正弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧四十五度折半為丁乙弧

二十二度三十分乙巳為四十五度之正弦戊巳與庚乙等為四十五度之餘弦於戊甲半徑内減去戊巳餘巳甲為勾乙巳為股求弦得乙甲為四十五度之通弦折半得乙辛即丁乙二十二度三十分之正弦也

又捷法以本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六與半徑十萬相減餘二萬九千二百八十九小餘三二一八



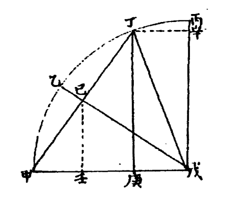
八一四折半得一萬四千六百四十四小餘六六〇九四〇七與半徑十萬相乘開方得三萬八千二百六十八小餘三四三二三六五即半弧二十二度三十分之正弦也蓋乙己為四十五度之正弦甲己為四十五度之正矢乙辛辛甲皆二十二度三十分之正弦如與乙己平行作一辛壬線平分甲己於壬成甲辛戊甲壬辛同式两勾股形其甲辛戊勾股形之甲戊弦與

甲辛勾之比同於甲壬辛勾股形之甲辛弦與甲壬勾之比為連比例三率故首率甲戊與末率甲壬相乘（首率甲戊與末率甲壬相乘與中率甲辛自乘之積相等）開方得甲辛為二十二度三十分之正弦也

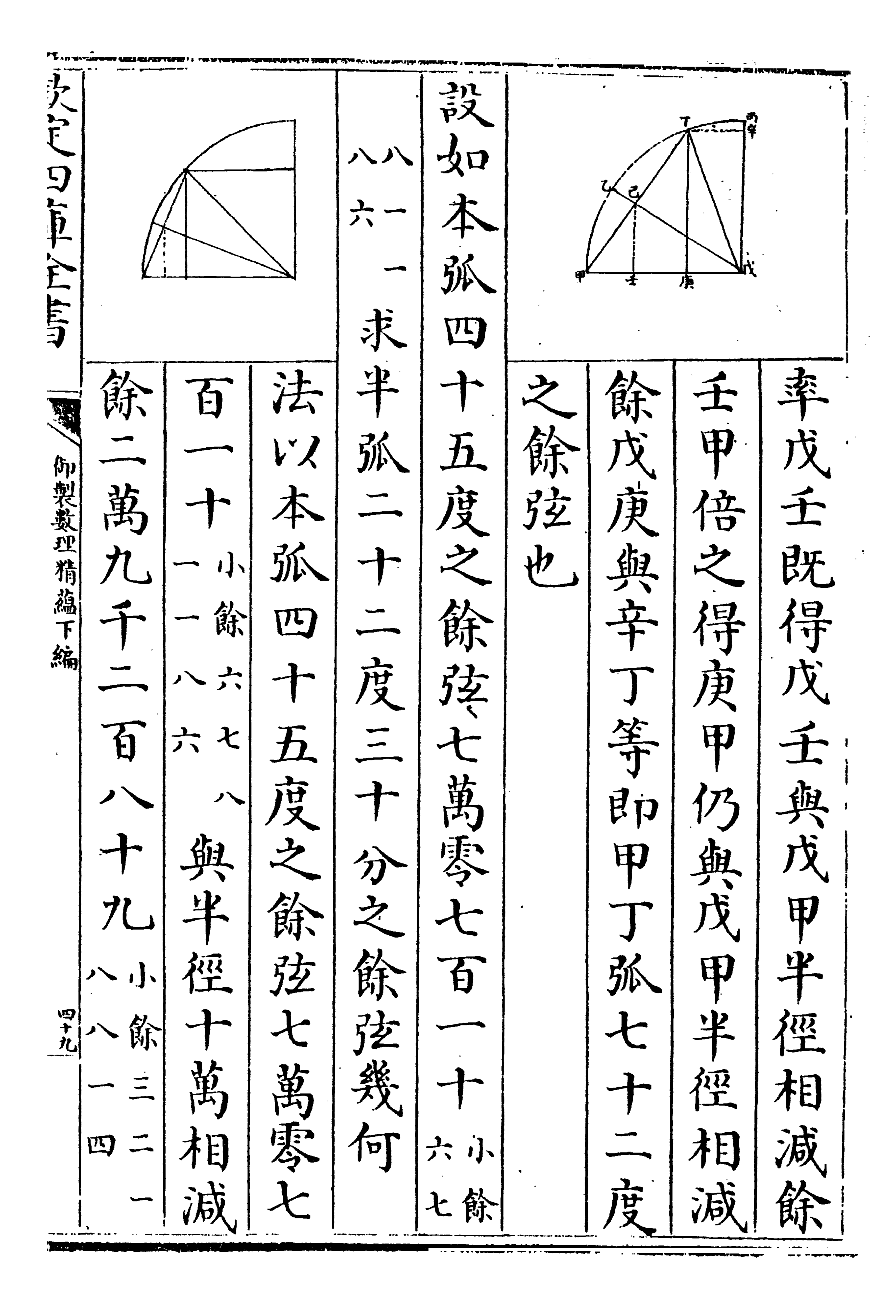
新增有本弧之餘弦求倍弧之餘弦及半弧之餘弦

設如本弧三十六度之餘弦八萬零九百零一（小餘六九九四三七五）求倍弧七十二度之餘弦幾何

法以本弧三十六度之餘弦八萬零九百零一小餘六九九四三七五自乘以半徑十萬除之得六萬五千四百五十小餘八四九七一八七與半徑十萬相減餘三萬四千五百四十九小餘一五〇二八一三倍之得六萬九千零九十八小餘三〇〇五六二六仍與半徑十萬相減餘三萬零九百零一小餘六九九四三七四即倍弧七十二度之餘弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧三十六度



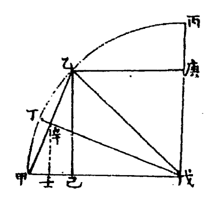
倍之為甲丁弧七十二度丁已為三十六度之正弦戊已為三十六度之餘弦丁庚為七十二度之正弦辛丁為七十二度之餘弦與戊庚等試自已至壬作已壬垂線遂成甲已戊已壬戊同式两勾股形其甲已戊勾股形之戊甲弦與戊已股之比同於已壬戊勾股形之戊已弦與戊壬股之比為連比例三率故中率戊已自乘以首率戊甲除之得末



辛戊壬既得戊壬與戊甲半徑相減餘壬甲倍之得庚甲仍與戊甲半徑相減餘戊庚與辛丁等即甲丁弧七十二度之餘弦也

設如本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六求半弧二十二度三十分之餘弦幾何

法以本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六與半徑十萬相減餘二萬九千二百八十九小餘三二一八八一四



折半得一萬四千六百四十四小餘六六〇九四〇七與本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六相加得八萬五千三百五十五小餘三三九〇五九三與半徑十萬相乘開方得九萬二千三百八十七小餘九五三二五一一即半弧二十二度三十分之餘弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧四十五度折半為丁乙弧二十二度三十分乙己為四十五度之正

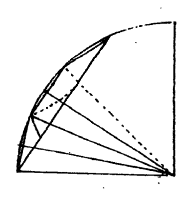
弦戊己與庚乙等為四十五度之餘弦乙辛為二十二度三十分之正弦戊辛為二十二度三十分之餘弦戊己四十五度之餘弦與戊甲半徑相減餘己甲折半得己壬再與戊己相加得戊壬試自辛至壬作辛壬垂線遂成甲辛戊辛壬戊同式兩勾股形其甲辛戊勾股形之戊甲弦與戊辛股之比同於辛壬戊勾股形之戊辛弦與戊壬股之比為連

比例三率故首率戊甲與末率戊壬相乘開方得戊辛為二十二度三十分之餘弦也

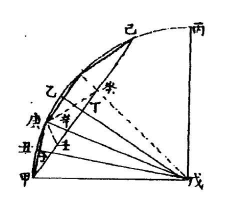
新增有本弧之正弦求其三分之一弧之正弦

設如三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二求其三分之一十二度之正弦幾何

法用連比例四率有一率求二率使一率與四率相加與二率三倍等之法以三十六度之正弦五萬八千七百七十

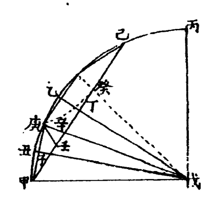


八小餘五二五二二九二倍之得一十一萬七千五百五十七小餘〇五〇四五八四為七十二度之通弦乃以半徑十萬自乘得一百億用七十二度之通弦再乘得一千一百七十五兆五千七百零五億零四百五十八萬四千為實又以半徑十萬自乘三因之得三百億為法按益實歸除之法除實得四萬一千五百八十二小餘三三八一六三四為二十四度之通弦折半得二



萬零七百九十一小餘一六九〇八一七即十二度之正弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧三十六度甲丁為其正弦倍之得甲已即甲乙已七十二度弧之通弦試以七十二度取其三分之一二十四度為甲庚弧其通弦甲庚與甲戊庚戊兩半徑成一戊甲庚三角形又庚戊半徑截甲已通弦於辛成一庚甲辛三角形又依庚辛度向辛甲邊作庚壬

線成一庚辛壬三角形此兩三角形俱與戊甲庚三角形為同式形其相當各邊俱成相連比例故戊甲為一率甲庚為二率庚辛為三率辛壬為四率也今甲己七十二度之通弦內有甲庚二率之三倍而少一辛壬四率蓋己癸癸壬辛甲三段皆與甲庚二率等而癸壬辛甲二段內却重辛壬一小段是甲己通弦內有己癸癸壬辛甲三二率而少一辛壬四率也若以甲己通弦為高與一率半徑自乘之方面相乘所成



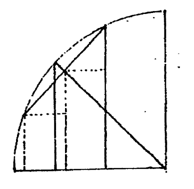
之長方體則比三倍二率為高與一率半徑自乘之方面相乘所成之長方體必少一四率為高與一率半徑自乘之方面相乘所成之扁方體此扁方體與二率自乘再乘之正方體等故以一率半徑自乘之三方面為法除實每次所得二率之數自乘再乘益入原積則積漸增與三倍二率與一率半徑自乘之方面相乘所成之長方體合而除得之

數即為二率既得甲庚二率為二十四度之通弦半之得甲子即甲丑弧十二度之正弦也

二簡法有兩弧之正弦餘弦求兩弧相加相減之正弦有距六十度前後相等弧之正弦求距弧之正弦

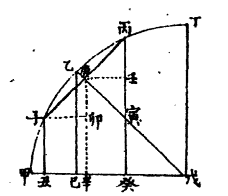
設如四十五度之正弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六餘弦亦七萬零七百一十小餘六七八一一八六又有二十四度之正弦四萬零六百七十三小餘六六四三〇七五餘弦九萬一千三百五十四小餘五四五七六四二求兩弧相加六十九度之正弦及兩弧相減二十一度之正弦各幾何

法以半徑十萬為一率四十五度之正



弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六為二率二十四度之餘弦九萬一千三百五十四小餘五四五七六四二為三率求得四率六萬四千五百九十七小餘四一八八〇二〇又以半徑十萬為一率四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一一八六為二率二十四度之正弦四萬零六百七十三小餘六六四三〇七五為三率求得四率二萬八千七百六十小餘六二三八四七六乃以兩四率相

加得九萬三千三百五十八小餘〇四二六四九六即兩弧相加所得六十九度之正弦如以兩四率相減餘三萬五千八百三十六小餘七九四九五四五即兩弧相減所餘二十一度之正弦也如甲乙丙丁九十度之一象限其乙甲弧四十五度乙己為四十五度之正弦己戊為四十五度之餘弦於乙甲弧四十五度加丙乙弧二十四度得丙甲弧六十九度又於乙甲



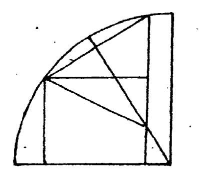
弧四十五度減乙子弧二十四度餘子甲弧二十一度試自丙至子作丙子線則丙乙弧乙子弧皆為二十四度丙庚與庚子皆為二十四度之正弦庚戊則為二十四度之餘弦今以乙戊半徑為一率乙己四十五度之正弦為二率庚戊二十四度之餘弦為三率求得四率庚辛與壬癸等又以乙戊半徑為一率己戊四十五度之餘弦為二率丙庚二

十四度之正弦為三率求得四率丙壬故以丙壬加於庚辛（庚辛原與壬癸等）共得丙癸即丙甲弧六十九度之正弦如於庚辛內減與丙壬相等之庚卯餘卯辛與子丑等即子甲弧二十一度之正弦也蓋乙巳戊與庚辛戊為同式勾股形故乙戊與乙巳之比同於庚戊與庚辛之比為相當比例四率又寅癸戊與乙巳戊亦為同式勾股形而寅癸戊勾股形

之寅角與丙庚寅勾股形之寅角為兩尖相對角其度等癸角與庚角俱為直角其度又等則戊角必與丙角等如作庚壬線成丙壬庚勾股形則此形之丙角既與乙己戊勾股形之戊角等而壬角又為直角與乙己戊勾股形之己角等故亦為同式勾股形而乙戊與己戊之比同於丙庚與丙壬之比為相當比例四率也

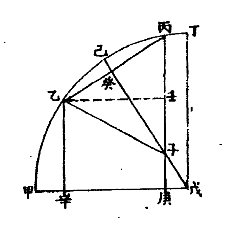
設如八十四度之弧距六十度二十四度其正弦九萬九千四百五十二小餘一八九五三六八又有三十六度之弧距六十度亦二十四度其正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二求距弧二十四度之正弦幾何

法以八十四度之正弦九萬九千四百五十二小餘一八九五三六八內減三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二餘四萬零六百七十三小餘六六四三○七六

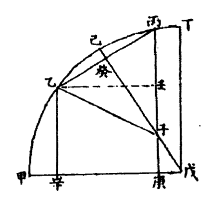


即距弧二十四度之正弦也如有距六十度前二十四度為三十六度其正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二距弧二十四度之正弦四萬零六百七十三小餘六六四三〇七六求距六十度後二十四度為八十四度之正弦則以三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二與距弧二十四度之正弦四萬零六百七十三小餘六六四三〇七六相加得九萬

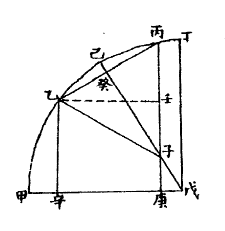
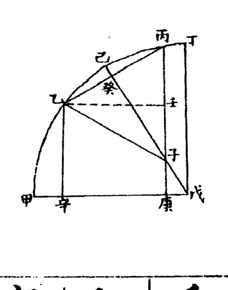
九千四百五十二小餘一八九五三六八即八十
四度之正弦也又如有距六十度後二
十四度為八十四度其正弦九萬九千
四百五十二小餘一八九五三六八距弧二十四
度之正弦四萬零六百七十三小餘六六四三
〇七六求距六十度前二十四度為三十
六度之正弦則以八十四度之正弦九
萬九千四百五十二小餘一八九五三六八與距
弧二十四度之正弦四萬零六百七十



三小餘六六四三〇七六相減餘五萬八千七百七十八小餘五二五二二九二即三十六度之正弦也如甲乙丙丁九十度之一象限其己甲弧六十度丙甲弧八十四度丙距己二十四度乙甲弧三十六度乙距己亦二十四度丙庚為八十四度之正弦乙辛為三十六度之正弦與壬庚等丙壬為丙正弦之較試自己至象限中心戊作己戊線又自丙至乙作丙乙線則



丙癸癸乙皆為距弧二十四度之正弦與丙壬兩正弦之較相等蓋己戊甲角六十度則己戊丁角為三十度丙庚與丁戊平行則丙子己角與丁戊己角為二平行線上所成之內外角必相等皆為三十度丙癸子角為直角則子丙癸角必為六十度矣又自乙至子作乙子線則乙癸子與丙癸子為同形勾股形癸乙子角亦必為六十度癸子乙角亦

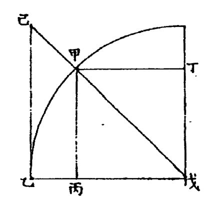
必為三十度兩勾股形合之共成一丙乙子三角形而丙子乙角亦必為六十度矣三角度既等則三邊必相等今丙壬為丙子之半丙癸為丙乙之半丙子既與丙乙等故丙壬亦必與丙癸等也有此法凡有六十度以前各弧之正弦則以各距弧之正弦與之相加可得六十度以後三十度各弧之正弦若有六十度以後各弧之正弦則以各距弧之

正弦與之相減可得六十度以前三十度各弧之正弦六十度前後三十度之正弦用加減而即得較之勾股比例諸法甚為簡便也

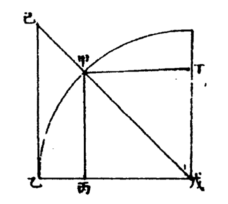
八線相求

設如四十八度之正弦七萬四千三百一十四小餘四八二五四七七餘弦六萬六千九百一十三小餘○六○六三五八求正矢正切正割各幾何

法以半徑十萬內減四十八度之餘弦六萬六千九百一十三小餘○六○六三五八餘三萬三千零八十六小餘九三九三六四二為正矢以餘弦六萬六千九百一十三小餘○六○六三五八為一率正弦七萬四千三百一



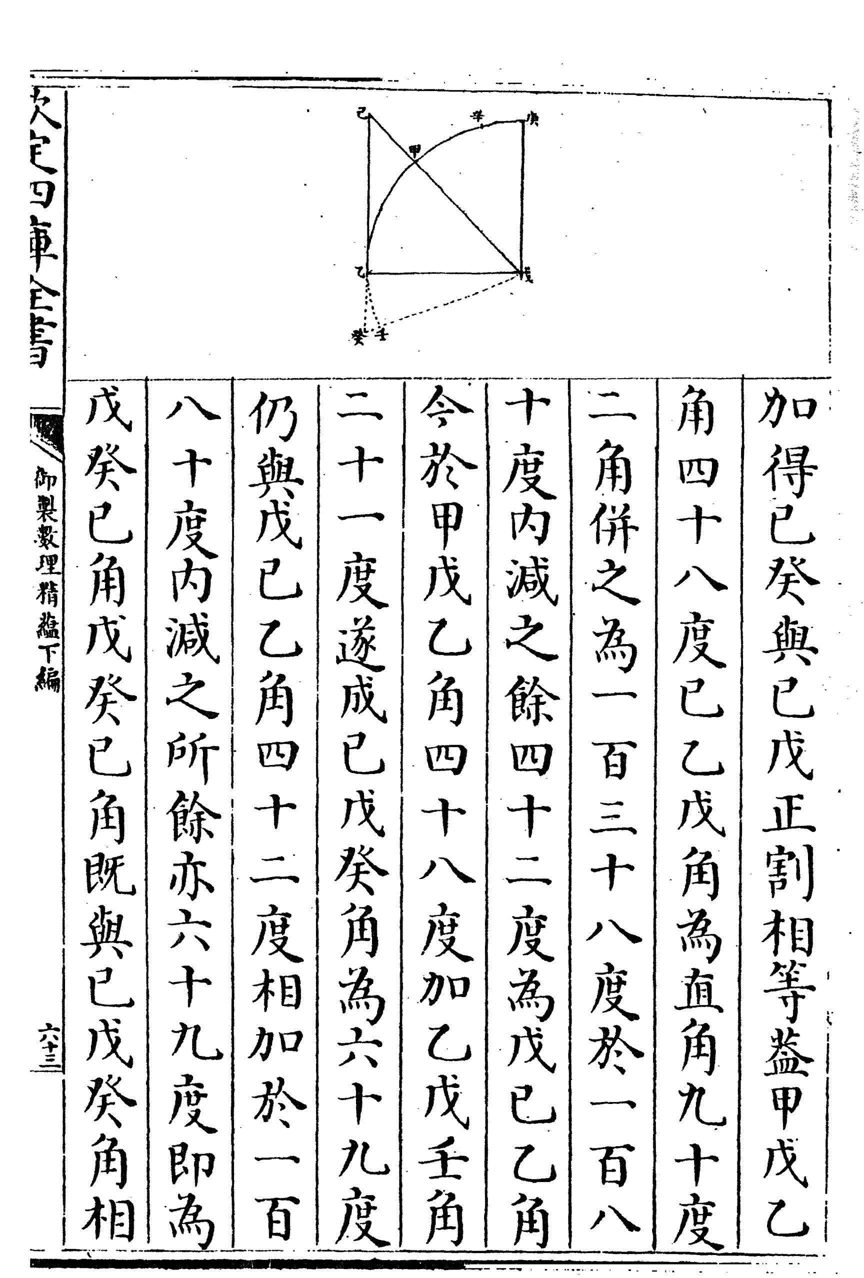
十四（小餘四八二五四七七）為二率半徑十萬為三率求得四率一十一萬一千零六十一（小餘二五一四八三〇）為正切以餘弦六萬六千九百一十三（小餘〇六〇六三五八）為一率半徑十萬為二率仍以半徑十萬為三率求得四率一十四萬九千四百四十七（小餘六五四九八六六）為正割也如圖甲乙弧四十八度甲丙為正弦甲丁為餘弦與丙戊等乙丙為正矢故乙戊半徑內減與



甲丁餘弦相等之丙戊餘乙丙即為正矢己乙為正切己戊為正割甲丙戊己乙戊兩勾股形為同式形故丙戊餘弦與甲丙正弦之比同於乙戊半徑與己乙正切之比為相當比例四率又丙戊餘弦與甲戊半徑之比同於乙戊半徑與己戊正割之比亦為相當比例四率也

又正切求正割捷法以餘弧折半得二

十一度乃以二十一度之正切三萬八千三百八十六(小餘四〇三三五〇三六)與本弧之正切一十一萬一千零六十一(小餘二五一四八三〇)相加得一十四萬九千四百四十七(小餘六五四八三三三)即為本弧之正割也如圖甲乙弧四十八度己乙為正切己戊為正割試將甲庚餘弧四十二度折半得庚辛二十一度移於乙壬又作乙癸為乙壬弧二十一度之正切與己乙相



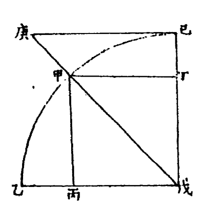
加得已癸與已戊正割相等葢甲戊乙角四十八度已乙戊角為直角九十度二角併之為一百三十八度於一百八十度内減之餘四十二度為戊已乙角令於甲戊乙角四十八度加乙戊壬角二十一度遂成已戊癸角為六十九度仍與戊已乙角四十二度相加於一百八十度内減之所餘亦六十九度即為戊癸已角戊癸已角既與已戊癸角相

等則已戊與已癸邊亦必相等也有此法則凡有逐度逐分之切線求割線可止用加法不用四率矣又凡有本弧之正切正割相減即得半餘弧之正切若有本弧之正割及半餘弧之正切相減即得本弧之正切也

設如四十八度之正弧七萬四千三百一十四小餘四八二五四七七餘弦六萬六千九百一十三小餘○六○六三五八

求餘矢餘切餘割各幾何

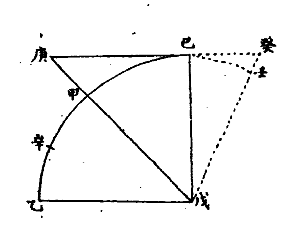
法以半徑十萬内減四十八度之正弦七萬四千三百一十四小餘四八二五四七七餘二萬五千六百八十五小餘五一七四五二三為餘矢以正弦七萬四千三百一十四小餘四八二五四七七為一率餘弦六萬六千九百一十三小餘○六○六三五八為二率半徑十萬為三率求得四率九萬零四十小餘四○四四二九七為餘切以正弦七萬四千三百一十四小餘四八二五四七七為一率半徑十萬為



二率仍以半徑十萬為三率求得四率一十三萬四千五百六十三小餘二七二九六〇七為餘割也如圖甲乙弧四十八度甲丙為正弦與丁戊等甲丁為餘弦已丁為餘矢故已戊半徑內減與甲丙正弦相等之丁戊餘已丁即為餘矢庚已為餘切庚戊為餘割甲丁戊庚已戊兩勾股形為同式形故丁戊正弦與甲丁餘弦之比同於已戊半徑與庚已餘切之

比為相當比例四率又丁戊正弦與甲戊半徑之比同於己戊半徑與庚戊餘割之比亦為相當比例四率也

又餘切求餘割捷法以本弧折半得二十四度乃以二十四度之正切四萬四千五百二十二（小餘六八六五三一〇）與本弧之餘切九萬零四十（小餘四〇四四二九七）相加得一十三萬四千五百六十三（小餘二七二九六〇七）即為本弧之餘割也如圖甲乙弧四



十八度庚已為其餘切庚戊為其餘割試將甲乙正弧四十八度折半得辛乙二十四度移於壬已又作癸已為壬已弧二十四度之正切與庚已相加得庚癸與庚戊餘割相等盖甲戊已角四十二度庚已戊角為直角九十度二角相併為一百三十二度於一百八十度内減之餘四十八度為戊庚已角今於甲戊已角四十二度加已戊壬角二十四

度遂成庚戊癸角為六十六度仍與戊庚己角四十八度相加於一百八十度內減之所餘亦為六十六度即為戊癸庚角戊癸庚角既與庚戊癸角相等則庚戊與庚癸邊亦必相等也有此法則凡有逐度逐分之切線求餘割亦可止用加法不用四率矣又凡有本弧之餘切餘割相減即得半本弧之正切若有本弧之餘割及半本弧之正切相減即

得本弧之餘切矣

求象限内各線總法

六宗併新增十八邊形及九邊形之每邊各半之得八弧之正弦用要法之一各求其餘弦次取十二度十分及四十五分之正弦復用新增法求其三分之一得十五分之正弦復求其三分之一即得五分之正弦既得五分之正弦乃用簡法之一求六十度以内之正弦每越五分而得一弦可得七百二十又用簡法之二求六十度以外之正弦亦越五分而得一

十五邊之半 用要法之三折半四次得六度三度一度三

弦又得三百六十如以一度之弦與五十九度之弦相加即六十一度之弦以二度之弦與五十八度之弦相加即六十二度之弦以至二十九度之弦與三十一度之弦相加即得八十九度之弦也總而計之一象限中共得正弦一千零八十已居全表五分之一象限中逐分計之共正弦五千四百故一千零八十為五分之一也再以五分之弦用要法之三得二分三十秒之弦復用新增法求其三分之一得五十秒之弦乃以五十秒之弧為一率五十秒之弦為二率一分之弧化六十秒為三率得四率為一分之弦既得一分之弦即用簡法之一簡法之二錯綜加減之則一象限中每

度每分之正弦悉得矣既得每度每分之正弦則用前八線相求之法即得每度每分之切割諸線矣如於一分之中欲析為六十秒則以比例四率求之即得每秒之八線也

御製數理精蘊下編卷十六